журнал© **Квант** ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2007 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Этюд о формуле Эйлера

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

Для треугольника, вписанного в окружность радиуса R и описанного около окружности радиуса r, известна формула Эйлера:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d – расстояние между центрами этих окружностей. Эта формула доказывается во многих задачниках[1]. В некоторых книгах[2] можно найти формулу Эйлера для четырехугольника; при этом указана только зависимость между этими величинами, но нет явного выражения для одной из них. Встает естественный вопрос – можно ли получить соответствующую формулу для произвольного n-угольника (разумеется, выпуклого)? В настоящей статье мы ответим на этот вопрос, и ответ будет утвердительным. Доказательство будет основано на кинематических соображениях. С ними можно познакомиться по книгам[3], а также по нашим предыдущим статьям (см. «Квант» №5 за 2002 г. и №1 за 2005 г.).

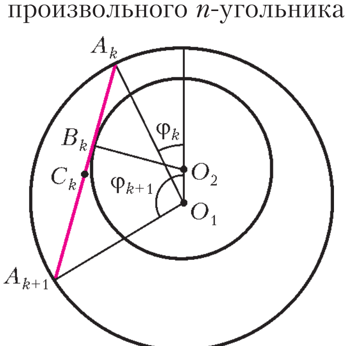


Рис. 1

В дальнейшем мы будем употреблять такую систему обозначений и терминов в n-угольнике (рис.1):

k – номер элемента n-угольника,

R – радиус описанной окружности,

r – радиус вписанной окружности,

O_1 – центр описанной окружности,

O_2 – центр вписанной окружности,

O_1O_2 – линия центров,

d – расстояние между центрами O_1, O_2,

$\rho = r/R$,

$\delta = d/R$,

A_k – k-я вершина n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$,

$a_k = A_kA_{k+1}$ – сторона n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$,

B_k – точка касания стороны n-угольника a_k и вписанной окружности,

$R_k = O_1A_k$ – радиус описанной окружности, проведенный в вершину A_k,

$r_k = O_2B_k$ – радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания B_k,

C_k – середина стороны a_k,

$b_k = A_kB_k$ – длина отрезка касательной,

$\varphi_k = \angle A_kO_1O_2$ – угол между радиусом R_k и линией центров O_1O_2,

$\alpha_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ – угол, под которым сторона A_kA_{k+1} видна из центра O_1,

$\dot\varphi_k = (\varphi_k)'_t = \omega_k$ – угловая скорость радиуса R_k.

Треугольник и две окружности (треугольник Эйлера)

Начнем с такого построения. Пусть нам даны окружность радиуса R с центром O_1 (бóльшая окружность) и окружность радиуса r с центром O_2 (меньшая окружность), расположенная внутри первого круга. Пусть A_1 – произвольная точка большей окружности. Проведем ее радиус O_1A_1. Из точки A_1 проведем касательную к меньшей окружности, и точку, в которой она пересечет большую окружность, назовем A_2. Аналогично получим точки A_3 и A_4 (рис. 2,*а*,*б*). Нам бы хотелось получить совпадение точек A_4 и A_1, так как в этом случае мы получаем треугольник, вписанный в большую окружность и описанный около меньшей окружности. Если зафиксировать R, d и точку A_1 на большей окружности, то такого совпадения можно добиться, изменяя радиус r (рис.2,*в*).

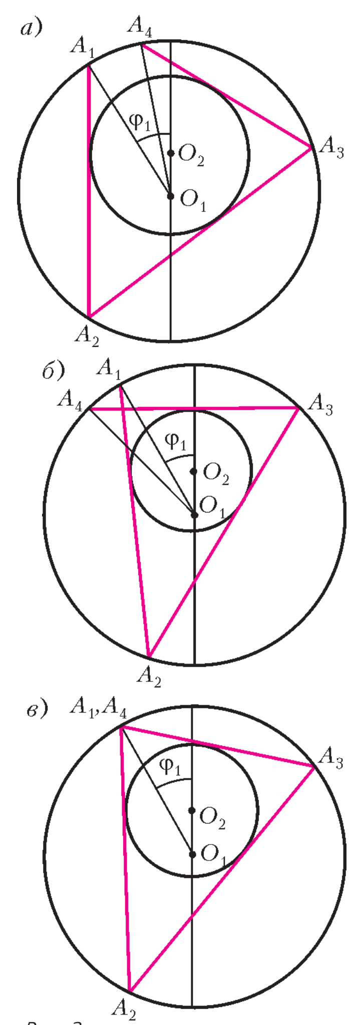


Рис. 2

Зададимся теперь вопросом: будут ли совпадать точки A_1 и A_4, если в ситуации на рисунке 2,*в* изменить начальное положение точки A_1?

Пусть в начальном положении радиус $R_1 = O_1A_1$ образует с линией центров угол φ_1 и имеет угловую скорость $\dot\varphi_1$. Найдем угловую скорость радиуса R_4. Если угловые скорости этих радиусов одинаковы, то точки A_1 и A_4 совпадают; если эти скорости не равны, то точки A_1 и A_4 в процессе вращения радиуса O_1A_1 разойдутся.

---

[1] *См., например, книгу: В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2001.*

[2] *См., например, книгу: З.А.Скопец, В.А.Жаров. Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. – М.: Учпедгиз, 1962.*

[3] *См., например, книгу: Ю.И.Любич, Л.А.Шор. Кинематический метод в геометрических задачах. – М.: Наука, 1976.*

При решении этой задачи мы будем использовать методы кинематики сложного движения точки и кинематики плоскопараллельного движения твердого тела (см. «Квант» №6 за 2003 г. и №1 за 2005 г.).

Напомним вкратце, что сложное движение точки это ее движение относительно двух систем отсчета, одна из которых считается неподвижной, а другая – подвижной. Тогда движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется ее абсолютным движением, а относительно подвижной системы отсчета – относительным движением. Соответственно, скорость точки при абсолютном движении называется ее абсолютной скоростью, а скорость точки при относительном движении называется ее относительной скоростью.

Более сложно понятие переносного движения и переносной скорости. Переносным движением точки называется движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной, переносной скоростью точки – скорость относительно неподвижной системы отсчета того пункта подвижной системы отсчета, с которым в данный момент совпадает движущаяся точка.

Пример. Теплоход плывет по реке, а по палубе идет человек. Пусть неподвижная система отсчета связана с берегами реки, а подвижная – с теплоходом. Тогда движение человека относительно теплохода является его относительным движением, а относительно берегов – абсолютным. Переносным движением человека является движение теплохода относительно берегов. Соответственно: абсолютная скорость человека – это его скорость относительно берегов, относительная – его скорость относительно теплохода, а переносная – это скорость относительно берегов той точки палубы, в которой в данный момент времени находится человек.

Также вкратце напомним некоторые сведения из теории плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела. Пусть плоская фигура движется в плоскости, которая ее содержит. Тогда оказывается, что при любом непоступательном движении этой фигуры (когда ее угловая скорость ω не равна нулю) она содержит такую точку P, скорость которой в данный момент времени равна нулю: $\vec{V_P} = \vec{0}$. Эта точка называется мгновенным центром скоростей данной фигуры (иначе – мгновенным центром вращений).

Пример. Колесо катится по рельсу без проскальзывания; в этом случае точка касания колеса и рельса – мгновенный центр скоростей колеса. При этом скорости точек этой плоской фигуры таковы, как будто фигура вращается вокруг неподвижной точки, совпадающей с мгновенным центром скоростей P. Так, скорость $\vec{V_A}$ некоторой точки A равна по модулю $PA \cdot \omega$ и перпендикулярна отрезку PA: $\vec{V_A} \perp \vec{PA}$.

Пусть отрезок A_1A_2 лежит на прямой L_1L_2 (рис.3). Пусть теперь прямая L_1L_2 обкатывает окружность радиуса r без проскальзывания в точке касания B_1. Точки A_1 и A_2 участвуют в сложном движении: они переносятся этой прямой и движутся по этой прямой. В результате сложения этих движений каждая из точек A_1 и A_2 движется по окружности радиуса R.

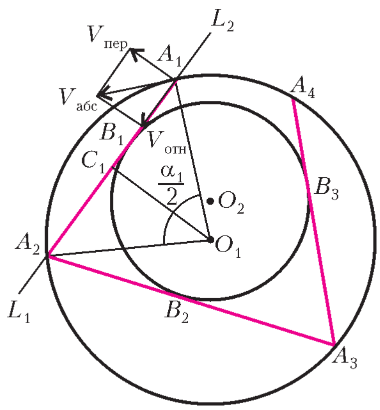


Рис. 3

Рассмотрим движение точки A_1. Пусть угловая скорость прямой L_1L_2 (стороны $a_1 = A_1A_2$ треугольника, лежащей на прямой L_1L_2) равна ω_L. Тогда $\omega_L = \omega_{a_1} = \dot{\varphi}_{a_1}$. Так как прямая L_1L_2 не проскальзывает по окружности радиуса r, скорость точки B_1 (точки касания) равна нулю и поэтому она является мгновенным центром скоростей этой прямой. Поэтому переносная скорость $\vec{V}_{пер}$ точки A_1 перпендикулярна отрезку $B_1A_1 = b_1$ и равна $V_{пер} = \omega_L B_1A_1 = \dot{\varphi}_{a_1} b_1$.

Вектор $\vec{V}_{A_1}$ абсолютной скорости точки A_1 направлен по касательной к большей окружности и по модулю равен $V_{A_1} = V_{абс} = \omega_1 R = \dot{\varphi}_1 R$ (здесь $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ – угловая скорость радиуса O_1A_1).

Относительная скорость $\vec{V}_{отн}$ точки A_1 направлена по прямой L_1L_2; ее величина нас не интересует.

По теореме о сложении скоростей имеем равенство $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}$. На рисунке 3 эта сумма построена. Видно, что

$$V_{пер} = V_{абс} \sin\angle\left(\vec{V}_{отн}, \vec{V}_{абс}\right) = V_{абс} \sin\frac{\alpha_1}{2}$$

(здесь α_1 – угол между радиусами O_1A_1 и O_1A_2). Подставляя сюда указанные выше значения $V_{пер}$ и $V_{абс}$, получим $\dot{\varphi}_{a_1} b_1 = \dot{\varphi}_1 R \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Но $R \sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_1}{2}$, и поэтому

$$\dot{\varphi}_{a_1} b_1 = \dot{\varphi}_1 \frac{a_1}{2}. \qquad (1)$$

Рассмотрим аналогичным образом движение точки A_2 как точки той же стороны a_1 и получим

$$\dot{\varphi}_{a_1} b_2 = \dot{\varphi}_2 \frac{a_1}{2} \quad (\text{здесь } b_2 = B_1A_2). \qquad (2)$$

Точно таким же образом получим аналогичные соотношения для угловых скоростей сторон a_2 и a_3 и радиусов O_1A_3 и O_1A_4. Сторона a_2 состоит из двух отрезков касательных к малой окружности:

$$a_2 = A_2A_3 = A_2B_2 + B_2A_3.$$

Но $A_2B_2 = A_2B_1 = b_2$. Поэтому

$$a_2 = b_2 + b_3 \quad \left(b_3 = B_2A_3\right).$$

Аналогично,

$$a_3 = A_3A_4 = b_3 + b_4 \quad \left(b_4 = B_3A_4\right).$$

Для стороны A_2A_3 получим равенства:

$$\dot{\varphi}_{a_2} b_2 = \dot{\varphi}_2 \frac{a_2}{2} \qquad (3)$$

и

$$\dot{\varphi}_{a_2} b_3 = \dot{\varphi}_3 \frac{a_2}{2}. \qquad (4)$$

Для стороны A_3A_4 получим равенства

$$\dot{\varphi}_{a_3} b_3 = \dot{\varphi}_3 \frac{a_3}{2} \qquad (5)$$

и

$$\dot{\varphi}_{a_3} b_4 = \dot{\varphi}_4 \frac{a_3}{2}. \qquad (6)$$

Уравнения (1) – (6) можно записать одной строкой:

$$\frac{2\dot{\varphi}_{a_1}}{a_1} = \frac{2\dot{\varphi}_{a_2}}{a_2} = \frac{2\dot{\varphi}_{a_3}}{a_3} = \frac{\dot{\varphi}_1}{b_1} = \frac{\dot{\varphi}_2}{b_2} = \frac{\dot{\varphi}_3}{b_3} = \frac{\dot{\varphi}_4}{b_4}. \qquad (7)$$

Из равенства $\frac{\dot{\varphi}_1}{b_1} = \frac{\dot{\varphi}_4}{b_4}$ следует, что если ломаная оказалась замкнутой, то $b_1 = b_4$, а потому угловые скорости $\dot{\varphi}_4$ и $\dot{\varphi}_1$ равны. Отсюда следует, что при движении по описанной окружности вершины A_1 замкнутой ломаной (треугольника) ее замкнутость сохранится.

Если треугольник (и вообще многоугольник) движется между двумя окружностями так, что он описан около одной окружности и вписан в другую окружность, то будем называть такое его движение скольжением между двумя окружностями (или просто скольжением), про каждую его вершину и сторону будем говорить, что они скользят вдоль соответствующей окружности. Такой треугольник (многоугольник) будем называть треугольником (многоугольником) Эйлера.

Многоугольник и две окружности

Точно таким же образом, как это мы сделали для треугольника, можно доказать, что если n-угольник (замкнутая ломаная) одновременно вписан и описан, то при скольжении одной из его вершин по описанной окружности остальные его вершины будут скользить по той же окружности, а его стороны – по вписанной в него окружности.

Необходимая для этого замкнутость ломаной $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ обеспечивается равенством угловых скоростей радиусов O_1A_1 и O_1A_{n+1}: $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_{n+1}$.

При скольжении многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ меняются величины его углов и длины сторон, но некоторые свойства неизменны. О таких свойствах речь пойдет дальше. Пока же заметим, что для него сохраняется равенство (7), которое кратко можно записать так:

$$\frac{2\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k} = \frac{\dot{\varphi}_k}{b_k} = c \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Словами это можно сформулировать так: отношения $\frac{2\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k}$ и $\frac{\dot{\varphi}_k}{b_k}$ равны и не зависят от индекса k.

Дальнейшие результаты будут основаны на следующем «руководящем принципе»:

Поскольку при скольжении многоугольника остаются неизменными R, r и d, то можно найти соотношение между этими величинами, переместив данный многоугольник в такое положение, в котором это соотношение находится сравнительно просто, а именно, в такое положение, когда многоугольник симметричен относительно линии центров O_1O_2.

Прежде чем находить соотношения между R, r и d в конкретных случаях, получим одно важное равенство. Рассмотрим рисунок 4. На нем изображен элемент многоугольника, содержащий сторону $a_1 = A_1A_2$, радиусы O_1A_1 и O_1A_2 и радиус $r = O_2B_1$, проведенный в точку касания стороны a_1 и вписанной окружности.

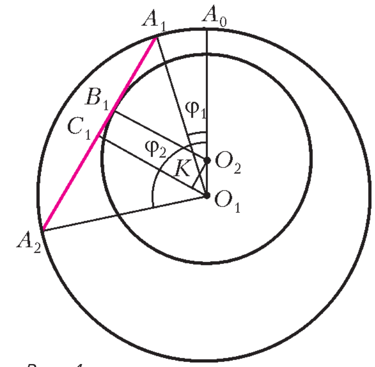


Рис. 4

Пусть угол между радиусом O_1A_1 и линией центров O_1A_0 равен φ_1, а угол между радиусом O_1A_2 и линией центров O_1A_0 равен φ_2. Тогда угол α_1 между радиусами O_1A_1 и O_1A_2 равен разности этих углов: $\alpha_1 = \angle A_2O_1A_1 = \varphi_2 - \varphi_1$. Высота треугольника $A_2O_1A_1$ – отрезок O_1C_1 – является в то же время биссектрисой угла при вершине O_1, поэтому

$$\angle A_2O_1C_1 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

и

$$\angle C_1O_1A_0 = \angle C_1O_1A_1 + \angle A_1O_1A_0 = \frac{\alpha_1}{2} + \varphi_1 = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Эта высота складывается из двух отрезков:

$$O_1C_1 = O_1K + KC_1 = d\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + r$$

(здесь точка K – проекция точки O_2 на прямую O_1C_1). Но верно и такое равенство:

$$O_1C_1 = O_1A_2 \cos\frac{\alpha_1}{2} = R\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Итак, имеем

$$R\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = r + d\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \qquad (9)$$

Разделили обе части на R:

$$\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{r}{R} + \frac{d}{R}\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Учитывая обозначения $\frac{r}{R} = \rho$, $\frac{d}{R} = \delta$, получим такую формулу:

$$\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \rho + \delta\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \qquad (10)$$

Такое же равенство выполняется для любого аналогичного элемента многоугольника, т.е.

$$\cos\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} = \rho + \delta\cos\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11)$$

Эта формула верна как для замкнутой ломаной, так и для незамкнутой. Если ломаная замкнута, точка A_{n+1} совпадает с точкой A_1 и выполняется равенство $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 360°$.

Начнем теперь вычисление ρ и δ в конкретных случаях.

Вычисление для треугольника Эйлера

Мы получим формулу Эйлера для равнобедренного треугольника; как было сказано ранее в «руководящем принципе», она будет верна для произвольного треугольника.

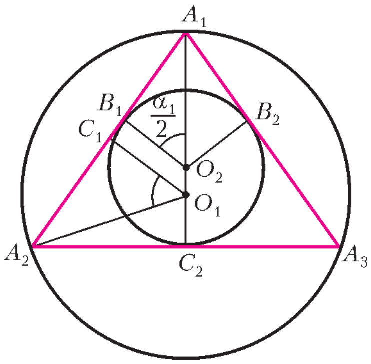


Рис. 5

На рисунке 5 треугольник $A_1A_2A_3$ расположен симметрично относительно линии центров и O_1O_2.

Здесь нужные нам соотношения появляются непосредственно из рисунка. Из него получаем такие равенства:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2B_1}{O_2A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Кроме того,

$$\cos\alpha_1 = \cos\angle A_2O_1A_1 = -\cos\angle C_2O_1A_2 =$$

$$= -\frac{O_1C_2}{O_1A_2} = -\frac{r-d}{R} = -(\rho-\delta).$$

Поскольку $\cos\alpha_1 = 2\cos^2\frac{\alpha_1}{2} - 1$, то

$$-(\rho-\delta) = 2\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2} - 1.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$2\rho^2 + \rho(1-\delta)^2 - (1-\delta)^2(1+\delta) = 0.$$

Положительный корень этого уравнения такой:

$$\rho = 0,5\left(1-\delta^2\right),$$

откуда

$$r = 0,5\frac{R^2-d^2}{R}. \qquad (12)$$

Тем самым, мы получили известное соотношение между величинами R, r и d, а именно формулу Эйлера для треугольника.

Вычисление для четырехугольника Эйлера

На рисунке 6 изображен вписанный и описанный четырехугольник, симметричный относительно линии центров O_1O_2 (дельтоид).

В этом случае

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2B_1}{O_2A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta},$$

а

$$\cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_2B_2}{O_2A_3} = \frac{r}{R+d} = \frac{\rho}{1+\delta}.$$

Кроме того, $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$, т.е. $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 90°$, а поэтому

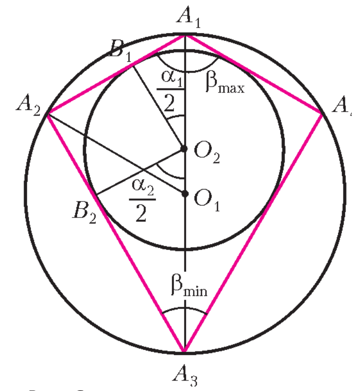


Рис. 6

$$\cos^2\frac{\alpha_1}{2} + \cos^2\frac{\alpha_2}{2} = 1,$$

или

$$\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2} + \frac{\rho^2}{(1+\delta)^2} = 1. \qquad (13)$$

Отсюда $\rho^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(1-\delta^2\right)^2}{1+\delta^2}$,

и

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-\delta^2}{\sqrt{1+\delta^2}},$$

или

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R^2-d^2}{\sqrt{R^2+d^2}}. \qquad (14)$$

Эту формулу, аналогичную формуле (12) для треугольника, будем называть формулой Эйлера для четырехугольника.

Вычисление для пятиугольника Эйлера

В этом случае нахождение нужной нам зависимости существенно сложнее, чем в предыдущих. В общем случае оно сводится к решению некоторого кубического уравнения.

Рассмотрим пятиугольник Эйлера, симметричный (согласно «руководящему принципу») относительно линии центров O_1O_2 (рис.7).

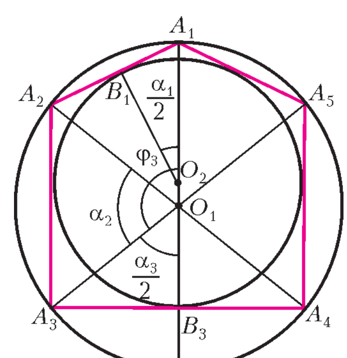


Рис. 7

Для решения задачи воспользуемся двумя первыми равенствами из (11), т.е. при $k = 1$ и $k = 2$. Так как в нашем случае $\varphi_1 = 0$ и (поэтому) $\varphi_2 = \alpha_1$, первое равенство (при $k = 1$) записывается так:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1-\delta},$$

а второе равенство (при $k = 2$) запишется так:

$$\cos\frac{\varphi_3-\alpha_1}{2} = \rho + \delta\cos\frac{\varphi_3+\alpha_1}{2}.$$

Второе равенство можно привести к виду

$$(1-\delta)\cos\frac{\varphi_3}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2} + (1+\delta)\sin\frac{\varphi_3}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2} = \rho. \qquad (15)$$

Третье уравнение получается из рассмотрения рисунка 7:

$$\cos\varphi_3 = \cos\left(180° - \frac{\alpha_3}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha_3}{2} =$$

$$= -\frac{O_1B_3}{O_1A_3} = -\frac{r-d}{R} = -(\rho-\delta) = \delta-\rho.$$

Дальнейшие преобразования таковы. Подставим в уравнение (15) значения тригонометрических функций:

$$\cos\frac{\varphi_3}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi_3}{2}}=\sqrt{\frac{1+\delta-\rho}{2}},$$

$$\sin\frac{\varphi_3}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi_3}{2}}=\sqrt{\frac{1-\delta+\rho}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2}}=\frac{\sqrt{(1-\delta)^2-\rho^2}}{1-\delta}$$

и получим

$$\rho\sqrt{\frac{1+\delta-\rho}{2}}+\frac{1+\delta}{1-\delta}(1-\delta+\rho)\sqrt{\frac{1-\delta-\rho}{2}}=\rho.$$

После избавления от иррациональностей и несложных преобразований приходим к уравнению третьей степени относительно ρ:

$$\rho^3\cdot 8\delta^2+4\rho^2\cdot\left(1-\delta^2\right)-2\rho\cdot\left(1-\delta^2\right)^2+\left(1-\delta^2\right)^3=0.$$

Это уравнение упрощается, если ввести новую переменную $y=\frac{1-\delta^2}{2\rho}$. Относительно этой переменной приходим к уравнению

$$y^3+y^2-y-\delta^2=0. \qquad (16)$$

Истинность этого уравнения можно проверить для случая правильного пятиугольника, когда $\delta=0$. Вы можете проделать это самостоятельно.

Полученное уравнение можно исследовать графически, а также решить по формуле Кардано или используя тригонометрию. И это тоже вы можете проделать самостоятельно.

Вычисление для шестиугольника Эйлера

Рассмотрим шестиугольник Эйлера, симметричный (согласно «руководящему принципу») относительно линии центров O_1O_2 (рис.8).

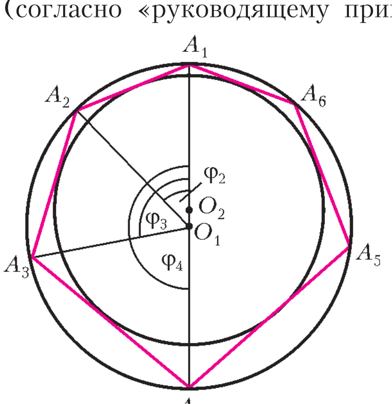


Рис. 8

Воспользуемся первыми тремя равенствами из (11), т.е. при $k=1$, $k=2$ и $k=3$.

Так как $\varphi_1=0$ и (поэтому) $\varphi_2=\alpha_1$, первое равенство запишется так:

$$\cos\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\rho}{1-\delta}, \qquad (17)$$

а второе – так:

$$(1-\delta)\cos\frac{\varphi_3}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}+(1+\delta)\sin\frac{\varphi_3}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}=\rho. \qquad (18)$$

Третье же равенство

$$\cos\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}=\rho+\delta\cos\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2}$$

(поскольку $\varphi_4=180^\circ$) приводится к виду

$$\sin\frac{\varphi_3}{2}=\frac{\rho}{1+\delta}. \qquad (19)$$

Подставив (17) и (19) в (18), получим:

$$\sin\frac{\alpha_1}{2}+\cos\frac{\varphi_3}{2}=1, \qquad (20)$$

или

$$\sqrt{1-\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2}}+\sqrt{1-\frac{\rho^2}{(1+\delta)^2}}=1. \qquad (21)$$

Эта формула симпатична, а попытка найти явную зависимость между ρ и δ приводит к такому, увы, некрасивому выражению:

$$\rho=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1-\delta^2}{\sqrt{1+\delta^2+\sqrt{\left(1+\delta^2\right)^2+12\delta^2}}}.$$

Для многоугольников Эйлера с числом сторон, большим 6, можно получить уравнения, связывающие значения ρ и δ в неявном виде. Получение явной зависимости между ними связано с громоздкими и вряд ли преодолимыми преобразованиями.

Потому мы и ограничиваемся получением формулы Эйлера только для трех-, четырех-, пяти- и шестиугольников Эйлера.

Задачи

Задача 1. *Центр описанной около треугольника окружности лежит на вписанной окружности. Вычислите отношение радиусов этих окружностей.*

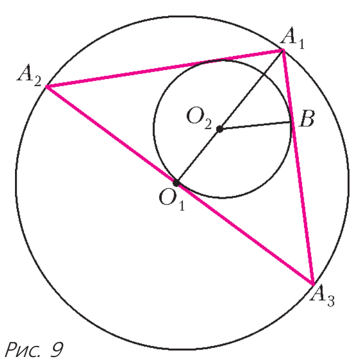


Рис. 9

Решение. Расположим треугольник так, чтобы одна из его сторон касалась вписанной в него окружности в центре описанной окружности O_1 (рис.9). Тогда эта сторона будет диаметром описанной окружности, а сам треугольник – прямоугольным и равнобедренным. Поэтому

$$R=O_1A_1=O_1O_2+O_2A_1=r+r\sqrt{2}=r\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Отсюда получаем

$$\rho=\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

Задача 2. *Отношение расстояния между центрами вписанной в треугольник окружности и описанной около треугольника окружности к радиусу последней равно* $\frac{d}{R}=\delta$. *В каких границах лежат углы этого треугольника?*

Решение. Оценим один из углов данного треугольника $A_1A_2A_3$ – пусть это будет угол при вершине A_1, который мы обозначим как α (рис.10,*а*). Тогда $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{l}$, где r – радиус вписанной окружности, а $l=O_2A_1$. При скольжении треугольника значение l

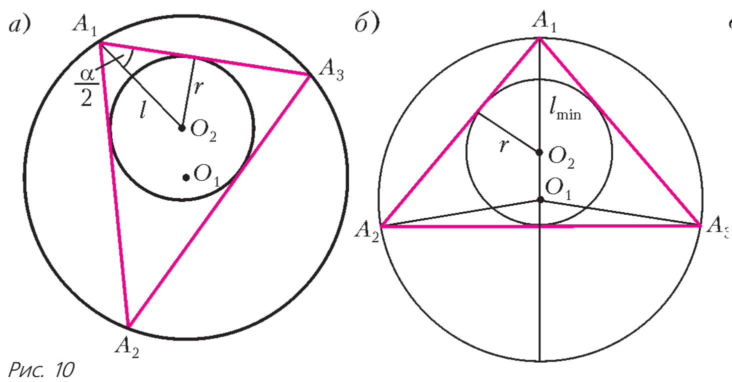


Рис. 10

меняется от наименьшего значения $l_{min} = R - d$ (рис.10,*б*) до наибольшего значения $l_{max} = R + d$ (рис.10,*в*). Поэтому $\sin\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{r}{l_{min}} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}$ и $\sin\frac{\alpha_{min}}{2} = \frac{r}{l_{max}} = \frac{r}{R+d} = \frac{\rho}{1+\delta}$. Так как $\rho = \frac{1-\delta^2}{2}$, то $\sin\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{1+\delta}{2}$ и $\sin\frac{\alpha_{min}}{2} = \frac{1-\delta}{2}$.

Отсюда ответ: $2\arcsin\frac{1-\delta}{2} \le \alpha \le 2\arcsin\frac{1+\delta}{2}$.

Замечание 1. Если помимо значения δ задано также значение ρ, то эта задача имеет и другое простое решение – найдите его. При этом получается более красивый ответ:

$$\arccos(\rho+\delta) \le \alpha \le \arccos(\rho-\delta).$$

Замечание 2. Оценив один из углов треугольника, мы тем самым оценили любой угол скользящего треугольника.

Теперь рассмотрим аналогичные задачи для четырехугольника.

Задача 3. *Окружность, вписанная в четырехугольник Эйлера, проходит через центр описанной около него окружности. Чему равно отношение радиусов этих окружностей?*

Эту задачу вы сможете сделать самостоятельно.

Ответ: $\rho = \delta = \sqrt{\sqrt{5}-2}$.

Задача 4. *Отношение расстояния между центрами вписанной в четырехугольник окружности и описанной около четырехугольника окружности к радиусу последней равно $\frac{d}{R} = \delta$. В каких границах лежат углы этого четырехугольника?*

Решение. На рисунке 6 четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ симметричен относительно линии центров O_1O_2. Вершина скользящего четырехугольника Эйлера поочередно занимает положение A_1, A_2, A_3 и A_4. Как и при скольжении треугольника (задача 2), угол при вершине четырехугольника достигает максимального значения β_{max}, когда расстояние от центра вписанной окружности до этой вершины минимально и равно $R - d$ (в вершине A_1), а минимального значения β_{min} – когда это расстояние максимально и равно $R + d$ (в вершине A_3).

Очевидно, что

$$\sin\frac{\beta_{min}}{2} = \cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\rho}{1+\delta},$$

а

$$\cos\frac{\beta_{min}}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Поэтому

$$\sin\beta_{min} = 2\sin\frac{\beta_{min}}{2}\cos\frac{\beta_{min}}{2} = \frac{2\rho^2}{1-\delta^2}.$$

Подставим сюда значение ρ^2 из формулы (14) и получим $\sin\beta_{min} = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}$. Поскольку $\beta_{min} + \beta_{max} = 180°$, то

$$\arcsin\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \le \beta \le 180° - \arcsin\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}.$$

Задача 5. *Вершины A_1 и A_4 шестиугольника Эйлера $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежат на линии центров O_1O_2 (см. рис.8). Радиус описанной окружности равен R. Докажите, что $a_1 + a_3 = 2R$ ($a_1 = A_1A_2$, $a_3 = A_3A_4$).*

Решение. Имеем такие равенства:

$$a_1 = 2R\sin\frac{\varphi_2}{2} = 2R\sin\frac{\alpha_1}{2},$$

$$a_3 = 2R\sin\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2} = 2R\sin\frac{180°-\varphi_3}{2} = 2R\cos\frac{\varphi_3}{2}.$$

Отсюда получаем, учитывая уравнение (20),

$$a_1 + a_3 = 2R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\varphi_3}{2}\right) = 2R.$$

Задача 6. *Пусть известны центральные углы α_k, под которыми стороны многоугольника Эйлера видны из центра описанной окружности. Чему равно отношение радиусов вписанной и описанной окружностей?*

Решение. Умножим каждое из равенств (11) на $\sin\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}$ и сложим полученные равенства:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2} = \rho\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2} + \delta\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_{k+1}+\varphi_k}{2}.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(\varphi_{k+1}-\varphi_k) = \rho\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{2} + \frac{1}{2}\delta\sum_{k=1}^{n}(\sin\varphi_{k+1}-\sin\varphi_k).$$

Но $\sum_{k=1}^{n}(\sin\varphi_{k+1}-\sin\varphi_k) = 0$ (учитывая, что $\varphi_{n+1} =$

$= 360° + \varphi_1$). И так как $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \alpha_k$, получим

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sin \alpha_k}{2\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\alpha_k}{2}}. \qquad (22)$$

Замечание. Если многоугольник Эйлера является треугольником с углами α, β, γ, то формула (22) выглядит так:

$$\rho = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}. \qquad (23)$$

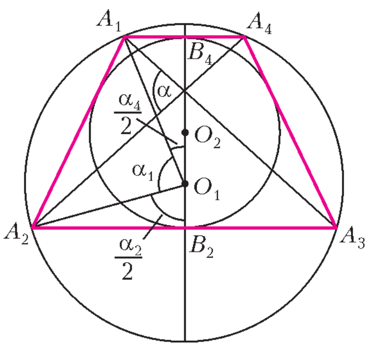


Рис. 11

Задача 7. *Четырехугольник Эйлера является трапецией (рис. 11). Зная δ, найдите угол α между ее диагоналями.*

Решение. Ясно, что трапеция $A_1A_2A_3A_4$ – равнобокая. Угол α равен полусумме дуг, которые высекают на описанной окружности диагонали A_1A_3 и A_2A_4, т.е. $\alpha = 0{,}5(\alpha_1 + \alpha_3)$. Так как у трапеции $\alpha_1 = \alpha_3$, то $\alpha = \alpha_1$. Очевидно выполнение равенства

$$\alpha = \alpha_1 = 180° - \frac{\alpha_4 + \alpha_2}{2},$$

где $\frac{\alpha_4}{2} = \angle A_1O_1B_4$, $\frac{\alpha_2}{2} = \angle A_2O_1B_2$. Найдем

$$\cos\frac{\alpha_4 + \alpha_2}{2} == \cos\frac{\alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}.$$

Из рисунка 11 следует

$$\cos\frac{\alpha_4}{2} = \frac{O_1B_4}{O_1A_1} = \frac{r+d}{R} = \rho + \delta,$$

$$\cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_1B_2}{O_1A_2} = \frac{r-d}{R} = \rho - \delta,$$

а потому

$$\cos\frac{\alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} = \rho^2 - \delta^2.$$

Найдем теперь $\sin\frac{\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}$:

$$\sin\frac{\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{1-(\rho+\delta)^2}\sqrt{1-(\rho-\delta)^2} = \rho^2.$$

Тогда

$$\cos\left(\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\right) = -\delta^2.$$

Окончательно получаем: $\cos\alpha = \delta^2$, и $\alpha = \arccos\delta^2$.

Задача 8. *Четырехугольник Эйлера при скольжении становится в некоторые моменты времени трапецией (рис.12,а) или дельтоидом (рис.12,б). В каком случае его периметр меньше?*

Решение. Пусть в трапеции $A_1A_2A_3A_4$ $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_1 = a_4$. Поскольку трапе-

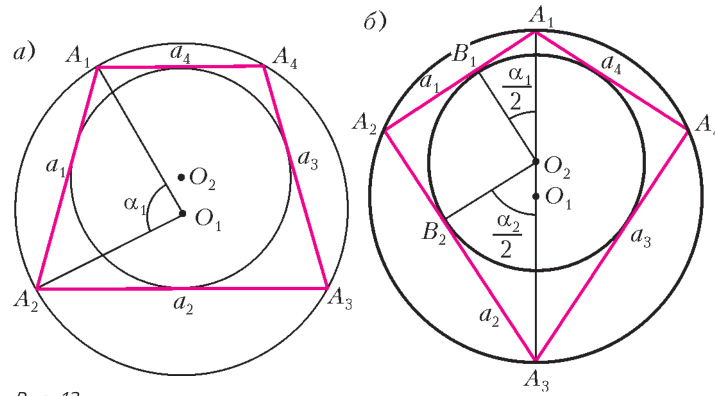


Рис. 12

ция описана около окружности, суммы пар ее противоположных сторон равны: $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Поэтому периметр P равен $2(a_1 + a_3)$. Но $a_1 = a_3$, и потому периметр P равен $4a_1$. Так как трапеция вписана в окружность, то $a_1 = 2R\sin\frac{\alpha_1}{2}$. В предыдущей задаче мы получили равенство $\cos\alpha = \cos\alpha_1 = \delta^2$. Поэтому

$$a_1 = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_1}{2}} = \sqrt{2}R\sqrt{1-\delta^2},$$

и

$$P = 4\sqrt{2}R\sqrt{1-\delta^2}.$$

В дельтоиде $A_1A_2A_3A_4$ $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_1 = a_4$. Его периметр равен

$$P_1 = 2(a_1 + a_3) = 2(a_1 + a_2) =$$

$$= 2\left(2R\sin\frac{\alpha_1}{2} + 2R\sin\frac{\alpha_2}{2}\right) = 4R\left(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2}\right).$$

Так как $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 90°$, то

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_2B_2}{O_2A_3} = \frac{r}{R+d} = \frac{\rho}{1+\delta},$$

$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2B_1}{O_2A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Тогда

$$P_1 = 4R\left(\frac{\rho}{1+\delta} + \frac{\rho}{1-\delta}\right) = \frac{8R\rho}{1-\delta^2}.$$

Подставим в это равенство $\rho = \frac{1-\delta^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+\delta^2}}$ и получим

$$P_1 = \frac{4\sqrt{2}R}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Чтобы выяснить, какой из найденных периметров меньше, найдем отношение периметра трапеции к периметру дельтоида. Оно равно $\sqrt{1-\delta^4} < 1$. Получается, что периметр трапеции меньше периметра дельтоида.

(Окончание следует)

Вверх и вниз через атмосферу

К.БОГДАНОВ

Можно ли улететь в космос на воздушном шаре?

В течение многих лет этот вопрос волновал известного русского ученого и изобретателя в области аэро- и ракетодинамики К.Э.Циолковского. Сначала он пытался обосновать возможность, а потом – невозможность таких полетов. И только в 1903 году ученый дал окончательный отрицательный ответ в ставшей классической работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами».

Рассчитывая необходимые размеры шара массой 1 кг, наполненного водородом, который мог бы поднять 1 кг полезного груза на высоту 27 км, Циолковский пришел к заключению, что «...даже папиросная бумага будет в 5 раз тяжелее той материи, которая должна быть употреблена на наш аэростат. Такая материя, в применении к аэростату, невозможна, потому что оболочка, сделанная из нее, будет рваться и сильно пропускать газ». И далее: «Что же сказать о поднятии приборов на большую высоту? Размеры аэростатов должны быть еще значительно больше, но не надо при этом забывать, что с увеличением размеров воздушного шара разрывающие оболочку силы все более и более берут перевес над сопротивлением материала. За пределы атмосферы поднятие приборов, с помощью воздушного шара, разумеется, совсем немыслимо...»

Итак, по мнению Циолковского, полет аэростатов в космос невозможен хотя бы только из-за отсутствия достаточно тонких и прочных материалов для оболочек аэростатов.

Прошло более ста лет, и сейчас создано довольно много материалов, о которых Циолковский не мог и мечтать. Так, использование полиэтиленовой пленки толщиной 3,4 мкм дало возможность японским ученым из Института космических исследований изготовить стратостат объемом 60000 м^3 (диаметром 50 м), масса которого составила всего 35 кг. В мае 2002 года этот стратостат установил рекорд, поднявшись на высоту 53 км с полезным грузом около 5 кг, состоящим из двух телевизионных камер и прибора для определения высоты. График рекордного подъема этого стратостата изображен на рисунке 1.

Таким образом, развитие технологий показало, что пророчество Циолковского в отношении воздушных шаров, вообще говоря, оказалось не совсем верным. Ведь на высоте 53 км плотность атмосферы составляет меньше $1/1000$ от ее плотности на уровне моря, поэтому можно считать, что с помощью воздушных шаров приборы за пределы атмосферы все-таки подняли! Так, может быть, вообще не существует верхнего предела для высоты, на которую может подняться стратостат? Попробуем ответить на этот вопрос.

Оцениваем энергию опускающегося атмосферного столба

Аэростат движется вверх, поскольку снизу на него действует выталкивающая сила Архимеда со стороны окружающего воздуха. Поднимаясь, аэростат освобождает под собой место, которое занимает воздух, вытесненный аэростатом сверху. Потенциальная энергия этого движущегося сверху вниз воздуха уменьшается, и часть этой энергии переходит в механическую энергию стратостата. Если $M_{\text{а}}$ – масса перемещающегося атмосферного воздуха, а H – характерная высота стратостата, то максимальная энергия, которая может быть передана стратостату от опускающегося воздуха,

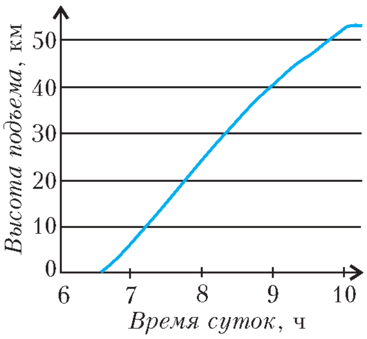


Рис.1. Рекордный подъем в воздух японского стратостата 22 мая 2002 года

равна

$$W_{max} = M_a g H .$$

Из справочника по физике можно узнать, что плотность ρ воздуха в атмосфере уменьшается с высотой h по экспоненциальному закону (рис.2)

$$\rho = \rho_0 e^{-bh} ,$$

где $\rho_0 = 1,23$ кг/м^3 – плотность воздуха на уровне моря, $b = 0,00013$ м$^{-1}$ – константа, связанная с плотностью ρ_0, ускорением свободного падения $g = 9,8$ м/с^2 и атмосферным давлением у поверхности земли $p_a = 101$ кПа соотношением $b = \rho_0 g/p_a$. Если максимальная площадь поперечного сечения стратостата в горизонтальной плоскости равна S, то, интегрируя выражение для плотности ρ, легко найти массу перемещающегося сверху вниз атмосферного воздуха:

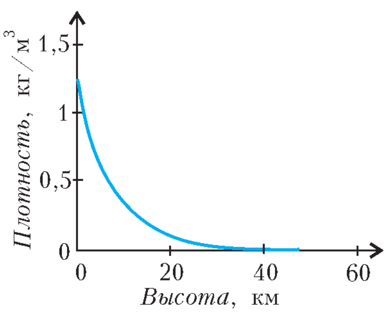


Рис.2. Изменение плотности атмосферы с высотой

$$M_a = \frac{\rho_0}{b} S .$$

Подставляя эту массу в формулу для максимальной энергии, получаем

$$W_{max} = \frac{\rho_0 g}{b} SH = \frac{\rho_0 g}{b} V ,$$

где V – объем стратостата.

Можно ли навсегда покинуть Землю на стратостате?

Сравним энергию опускающегося столба атмосферы W_{max} с энергией W_{II}, которую необходимо передать телу массой m, чтобы навсегда вывести его за пределы тяготения Земли, придав ему вторую космическую скорость $\upsilon_{II} = 11,2$ км/с. Можно показать, что

$$W_{II} = mgR_З ,$$

где $R_З = 6400$ км – радиус Земли. Если считать, что вся энергия опускающегося столба атмосферы переходит в кинетическую энергию поднимающегося тела, то это тело, поднимаясь, может достичь второй космической скорости при условии

$$W_{II} \le W_{max} , \text{ или } \frac{m}{V} \le \frac{\rho_0}{bR_З} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 .$$

Это означает, что улететь далеко в космос, затратив только энергию атмосферы, мы сможем, когда научимся заполнять почти невесомые и очень прочные стратостаты... вакуумом. Например, если изготовить заполненный вакуумом стратостат массой 1 кг и объемом 1000 м^3, то такой гипотетический стратостат в принципе мог бы улететь навсегда в космос при условии, что атмосфера не будет сопротивляться его движению.

Конечно, все это из области фантастики, но ведь и Циолковский сто лет тому назад тоже фантазировал.

Кончаем фантазировать и оцениваем максимально возможную высоту подъема стратостата

Известно, что оболочку стратостата на земле заполняют лишь частично, и вот почему. Если сразу полностью надуть стратостат гелием, придав ему шарообразную форму и увеличив до предела подъемную силу, то, поднявшись высоко, он может лопнуть, не выдержав разности давлений. Поэтому отрывающийся от земли стратостат похож на длинный сморщенный чулок, слегка расширяющийся кверху. Поднимаясь в разреженные слои атмосферы, стратостат постепенно расширяется и принимает форму, близкую к шарообразной. Оценим максимальную высоту подъема такого стратостата.

Стратостат перестанет двигаться вверх и достигнет максимальной высоты h_{max}, когда сила Архимеда окажется равной силе тяжести. К этому времени стратостат раздуется полностью, его объем будет V_{max}, а сила Архимеда станет равной

$$F_A = \rho_0 e^{-bh_{max}} V_{max} g .$$

Пусть масса оболочки и оборудования стратостата равна M, а масса гелия, которым был заполнен стратостат на земле при температуре $T_a = 293$ К и нормальном атмосферном давлении p_a, составляет $m_г = \rho_г V_{min}$, где $\rho_г = 0,17$ кг/м^3 – плотность гелия и V_{min} – занимаемый им объем. Тогда сила тяжести стратостата будет равна

$$F_т = (M + m_г) g = Mg + \rho_г V_{min} g .$$

Приравнивая силы F_A и $F_т$, получаем следующее выражение для максимальной высоты подъема h_{max} гелиевого стратостата:

$$h_{max} = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 V_{max}}{M + \rho_г V_{min}} .$$

Из формулы для h_{max} следует, что, чем меньше V_{min}, тем выше поднимется стратостат. Однако уменьшать V_{min} мы можем только до тех величин, при которых стратостат сумеет оторваться от земли. А именно, пока

$$\frac{V_{min}}{M} > \frac{1}{\rho_0 - \rho_г} .$$

Величина в правой части полученного неравенства очень близка к единице. Таким образом, стратостат массой 40 кг (без газа) достаточно заполнить гелием в объеме 40 м^3, и он медленно пойдет вверх. Но на самом деле V_{min} должен быть на порядок больше расчетной величины, так как, заполняя стратостат, мы должны его расправить. Иначе, поднимаясь вверх, незаполненный шлейф стратостата может запутаться. Другими словами, гелий объемом V_{min} должен оказаться в верхней части стратостата. Чтобы сделать так, сооружают специальную платформу, на которой и заполняют стратостат.

Будем считать, например, что $V_{min} = V_{max}/100$. Подставляя в выражение для максимальной высоты $M = 40$ кг, $V_{max} = 60000$ м^3, $V_{min} = 600$ м^3 (при этом $V_{min}/M = 15$ м^3/кг), получаем $h_{max} \approx 48{,}2$ км.

Итак, наша оценка почти совпала с рекордной высотой подъема обсуждаемого японского стратостата.

А можно ли, заполнив тот же стратостат меньшим объемом гелия, добиться существенно большей высоты поднятия? Положив, например, $V_{min} = 400$ м^3 ($V_{min}/M = 10$ м^3/кг), получаем $h_{max} \approx 50{,}3$ км, что всего на 2 км больше. Дальше уменьшать V_{min}, очевидно, уже невозможно.

Однако, как следует из формулы для h_{max}, чтобы поднять стратостат еще выше, мы можем не только уменьшать V_{min}, но и увеличивать V_{max}. Найдем зависимость h_{max} от V_{max}, считая, что $V_{min}/M = 10$ м^3/кг и стратостат не поднимает никакого полезного груза. Пусть полностью раздутый стратостат имеет форму шара радиусом R_{max}. Тогда поверхность этого шара равна $4\pi R_{max}^2$, а масса оболочки составляет $M = \rho_c \cdot 4\pi R_{max}^2 d$, где ρ_c – плотность материала оболочки стратостата, а d – ее толщина. Разделив числитель и знаменатель дроби, от которой берется логарифм в формуле для h_{max}, на M, получаем

$$h_{max} = \frac{1}{b}\ln\frac{\rho_0\dfrac{V_{max}}{M}}{1+\rho_г\dfrac{V_{min}}{M}} = \frac{1}{b}\ln\frac{\rho_0\dfrac{R_{max}}{3\rho_c d}}{1+\rho_г\dfrac{V_{min}}{M}}.$$

Зависимость h_{max} от V_{max} показана сплошной линией на рисунке 3 для стратостата, сделанного из полиэтиленовой пленки плотностью $\rho_c = 1000$ кг/м^3 и толщиной $d = 3{,}4$ мкм при условии что $V_{min}/M = 10$ м^3/кг. Видно, что с ростом максимального объема стратостата увеличивается и максимальная высота его подъема, но в диапазоне от 60000 до 120000 м^3 эта высота возрастает лишь на 1 км. В то же время, использование более тонкой пленки, например толщиной 2 мкм, дает увеличение высоты подъема почти на 5 км для стратостатов любых размеров (см. пунктирную линию на рисунке 3).

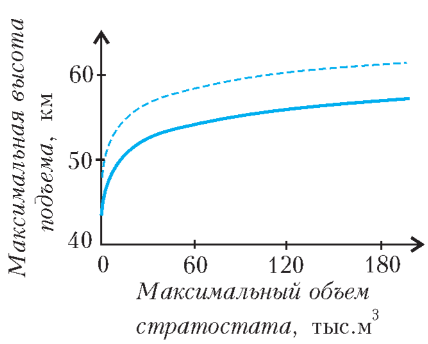


Рис.3. Теоретическая зависимость высоты подъема стратостата от его максимального объема

Оцениваем скорость подъема стратостата

Стратостат является незаменимым устройством для послойного изучения атмосферы, поскольку он поднимается вверх довольно медленно. Так, например, упомянутый японский стратостат до своей рекордной высоты поднимался более трех часов практически равномерно со скоростью около 260 м/мин (см. рис.1). От каких же параметров зависят скорость и время подъема стратостата, и можно ли их оценить теоретически?

На стратостат действуют три силы – сила Архимеда, сила сопротивления воздуха и сила тяжести. Сила Архимеда, толкающая вверх стратостат объемом V, находящийся на высоте h, равна

$$F_А = \rho V g = \rho_0 e^{-bh} V g.$$

Сила тяжести стратостата, заполненного гелием, была нами выведена ранее:

$$F_т = Mg + \rho_г V g.$$

Сила сопротивления воздуха, действующая на стратостат при его равномерном подъеме со скоростью v, равна

$$F_{сопр} = CS\frac{\rho v^2}{2},$$

где S – площадь поперечного сечения стратостата, а C – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом аэродинамического сопротивления, который для шарообразной формы стратостата составляет 0,24. (Подробнее об аэродинамической силе, одной из составляющих которой является сила сопротивления, можно прочитать в книге А.Л.Стасенко «Физические основы полета» – вып.91 «Библиотечки «Квант».)

Заметим, однако, что воздух играет еще одну роль. При ускоренном движении стратостат вынужден придавать ускорение некоторой массе воздуха, находящегося перед ним, поэтому масса стратостата как бы увеличивается. Это увеличение массы называют присоединенной массой. Как показывают расчеты, при ускоренном подъеме шарообразного стратостата присоединенная масса равна половине массы воздуха в объеме, занимаемом стратостатом.

Итак, все силы, действующие на стратостат, описаны, но, перед тем как оценить скорость подъема, нам необходимо описать изменение формы и объема стратостата при подъеме.

Пусть верхняя часть стратостата всегда имеет форму полусферы радиусом r, равным радиусу поперечного сечения стратостата, а нижняя его часть представляет собой половину эллипсоида вращения с полуосями r, r и L (рис.4). При движении вверх, когда давление воздуха снаружи падает, объем стратостата увеличивается, площадь его поперечного сечения πr^2 растет, а вертикальный размер L уменьшается, приближаясь к r_{max}. В конце концов стратостат принимает шарообразную форму с радиусом r_{max}. Чтобы описать все промежуточные формы стратостата, можно считать, что для них справедливо следующее равенство:

$$r + L = 2r_{max}.$$

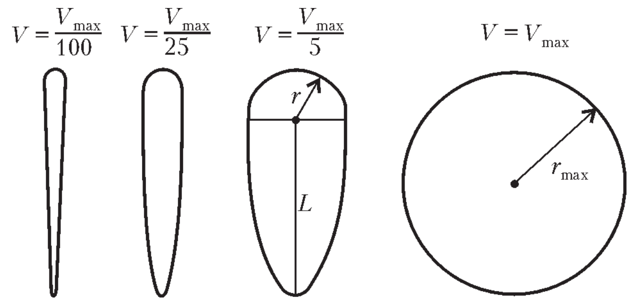


Рис.4. Изменение формы и объема модельного стратостата при подъеме

При этом объем стратостата равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 r_{max} = \frac{4}{3} S r_{max} .$$

Но пока оболочка стратостата не натянулась, его объем можно вычислить по уравнению Клапейрона–Менделеева, считая, что давление и температура гелия равны соответствующим параметрам воздуха снаружи. Легко показать, что при подъеме сила Архимеда, до тех пор пока оболочка стратостата не натянулась, остается неизменной и равной весу воздуха, вытесненного стратостатом у поверхности земли:

$$F_A = m_в g = \rho_в V_{min} g = \frac{p_a M_в}{RT_a} V_{min} g ,$$

где $M_в = 29$ г/моль – молярная масса воздуха. Тогда объем стратостата достигает своего максимального значения V_{max} на высоте

$$h_* = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 V_{max} g}{F_A} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{M_г}{M_в} \frac{\rho_0 V_{max}}{\rho_г V_{min}} \right).$$

Для японского стратостата с $V_{min} = 300$ м^3 высота h_*, вычисленная по этой формуле, составляет чуть более 40 км (точнее – 40,9 км). Таким образом, первые 40 км стратостат поднимался под действием *постоянной* силы Архимеда, после чего ее величина стала уменьшаться, так как объем стратостата уже не мог увеличиваться, и еще через 13 км сила Архимеда оказалась равной силе тяжести – стратостат остановился.

Определим скорость движения стратостата на участке подъема с постоянной силой Архимеда. Как уже говорилось, сила сопротивления воздуха зависит от произведения $S\rho$, причем при всех изменениях формы и объема площадь поперечного сечения стратостата S связана с его объемом соотношением $S = (3/4)V/r_{max}$. С учетом этого для силы сопротивления получаем

$$F_{сопр} = CS\frac{\rho v^2}{2} = \frac{3C}{8r_{max}} \frac{pV}{RT} M_в v^2 = \frac{3C}{8r_{max}} \frac{p_a V_{min}}{RT_a} M_в v^2 .$$

Отсюда следует, что множитель при v^2 изменяется с высотой так, как изменяется коэффициент C. Сначала аэростат имеет каплевидную форму, для которой коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха $C \approx 0,04$, а в конце приобретает шарообразную форму, для которой $C \approx 0,24$. Еще раз облегчим себе задачу, считая, что в среднем $C \approx 0,14$.

Попробуем сначала пренебречь присоединенной массой. Тогда из равенства $F_A = F_{сопр} + (M + m_г) g$ можно получить следующее выражение для скорости подъема стратостата:

$$v = \sqrt{\frac{8 g r_{max}}{3C} \left(1 - \frac{M + m_г}{m_в} \right)} ,$$

где $m_в$ – уже упоминавшаяся масса вытесненного стратостатом воздуха на земле. Для нашего «подопытного» стратостата с $r_{max} = 25$ м, C = 0,14, M = = 40 кг, $m_г = 68$ кг, $V_{min} = 400$ м^3, $m_в = 492$ кг последняя формула дает v = 30,3 м/с = 1818 м/мин, что в 7 раз больше реальной скорости, которую можно вычислить из данных, приведенных на рисунке 1. Значит, надо считать честно, т.е. учитывая присоединенную массу.

Считаем скорость подъема, учитывая присоединенную массу

Учесть эффект присоединенной массы $M_п$ довольно легко: достаточно в формулу для вычисления v подставить $M + M_п$ вместо M. Но основную трудность представляет подбор формулы для вычисления самой присоединенной массы. Оказалось, что значение скорости подъема стратостата, получаемое с учетом $M_п$, ближе всего соответствует данным рисунка 1, если считать, что присоединенная масса составляет 0,77 массы воздуха, вытесняемого стратостатом. Это значение не вызывает удивления, поскольку для шара оно должно быть 0,5, а для цилиндра, движущегося перпендикулярно своей оси, – 1,0.

Таким образом, на примере стратостата мы показали, что рассчитать движение тел малой плотности в средах большой плотности можно только в том случае, если учесть эффект присоединенной массы. Аналогично следует поступать при обсуждении движения пузырька воздуха, всплывающего в жидкости. А вот летящий в воздухе камень, хотя и вовлекает в движение некоторую массу воздуха перед собой, но плотность воздуха в тысячи раз меньше плотности камня, и поэтому эффект присоединенной массы в этом случае будет совсем незначительным.

А если прыгнуть из стратосферы на Землю?

Именно так сделал американец Дж.Киттенджер 16 августа 1960 года, спрыгнув со стратостата, поднявшегося на высоту 31 км. В течение первых 13 секунд он летел в свободном падении, потом открылся маленький стабилизирующий парашют диаметром 1,8 м, который лишь слегка замедлил свободное падение, но зато предотвратил смертельно опасное закручивание. Так он летел еще 4,5 минуты, опустившись до высоты 5,3 км, на которой уже раскрылся обычный парашют диаметром 8,5 м.

Когда свободное падение парашютиста происходит в высоких слоях атмосферы, где воздух сильно разрежен, его скорость может достигать очень больших значений. В этом полете скорость Киттенджера вплотную приблизилась к скорости звука и составила более 900 км/ч. Поэтому вход парашютиста в более плотные слои воздуха можно было рассматривать как столкновение, со всеми вытекающими отсюда последствиями. Так, Киттенджер, «ударившись» о плотные слои воздуха на высоте 23000 м, почувствовал перегрузки около 1,2g. Этот прыжок до сих пор является неофициальным рекордом по высоте свободного падения. Однако, поскольку прыжок был совершен при помощи стабилизирующего парашюта, он не был зарегистрирован как рекорд.

Можно оценить максимальную скорость падения Киттенджера, если считать, что стабилизирующий парашют на высоте h = 30000 м сделал его полет равномерным, т.е. сила тяжести была полностью скомпенсирована силой сопротивления воздуха на этой высоте. Тогда формула для зависимости его скорости от высоты будет такой:

$$v = \sqrt{\frac{2M_{\text{К}}g}{CS_{\text{К}}\rho_0}e^{bh}},$$

где $M_{\text{К}}$ – масса Киттенджера вместе с парашютами, составлявшая около 200 кг, $S_{\text{К}}$ – площадь поперечного сечения стабилизирующего парашюта диаметром 1,8 м, а C – коэффициент аэродинамического сопротивления парашюта, который можно считать равным единице. Если подставить все эти данные в формулу, то мы получим v = 250 м/с = 900 км/ч, что очень близко к реальным значениям скорости рекордного прыжка.

Таким образом, при полете Киттенджера, как мы и предполагали, присоединенная масса не оказывает существенного влияния, поскольку плотность Киттенджера в десятки тысяч раз больше плотности высотных слоев атмосферы, где он установил свой рекорд.

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Шведская линия

А.ВАСИЛЬЕВ

В РЯДУ ВЫДАЮЩИХСЯ ШВЕДСКИХ УЧЕНЫХ И изобретателей, среди которых Андерс Йонас Ангстрем (1814–1874), Иоганнес Ридберг (1854–1919), Сванте Аррениус (1859–1927), Ханнес Альфвен (1908–1995), блистают также имена Кристофера Польхема (1661–1751) и Андерса Цельсия (1701–1744). Двое последних удостоены чести быть представленными на монетах и банкнотах этого скандинавского государства.

Знаменитого механика и изобретателя *Кристофера Польхема* еще при жизни сравнивали с Архимедом и Леонардо да Винчи. В возрасте шестнадцати лет он поступил в Упсальский университет, где изучал математику и физику, сохраняя при этом глубокий интерес к механике и инженерным наукам. Его первым практическим достижением стал ремонт старинных астрономических часов кафедрального собора в Упсале, созданных Петрусом Астрономусом в 1506 году. Успех этого предприятия произвел сильное впечатление на Коллегию горных предприятий в Швеции, и Польхему было предложено создать устройство для подъема и транспортировки руды, которое впоследствии использовалось на всех шахтах. Спонсируемый этим ведомством, Польхем объездил всю Европу, с тем чтобы привнести в Швецию новейшие технические достижения. В 1697 году в Стокгольме он основал механическую лабораторию, где не только экспонировались новинки технической мысли, но и осуществлялась подготовка инженерных кадров. Эта лаборатория считается предшественником знаменитого Королевского технологического института.

Крупнейшим достижением Польхема стала полностью автоматизированная фабрика, производившая самую разнообразную продукцию и использовавшая лишь водяную энергию. Хотя продукция фабрики, скажем часы или висячие замки, отличалась высоким качеством и низкой ценой, рабочие отнеслись к фабрике без всякого энтузиазма, справедливо полагая, что бездушные машины со временем заменят их умелые руки. В конце концов фабрика сгорела, однако, воодушевленный идеей технического прогресса, король Швеции Карл XII освободил изобретателя от уплаты налогов в королевскую казну.

Независимо от Джироламо Кардано шведский ученый изобрел карданное соединение, которое в его стране называлось узлом Польхема. Важный вклад Польхем внес в развитие системы водных коммуникаций. Он участвовал в строительстве канала, соединившего западное и восточное побережья Швеции, и спроектировал для него ряд гидротехнических сооружений. Перу Польхема принадлежат труды по медицине, экономике, общественным наукам, геологии и астрономии.

Семейной традицией Цельсиев были занятия астрономией, причем не в качестве хобби, а в ранге профессоров Упсальского университета. Именно эти позиции занимали оба дедушки создателя температурной шкалы (Магнус Цельсий и Андерс Спуле), а также его отец (Нильс Цельсий).

Андерс Цельсий был избран профессором астрономии в Упсальском университете в 1730 году. После этого он предпринял длительный вояж по европейским обсерваториям, где встречался практически со всеми ведущими астрономами своего времени.

Вскоре после своего возвращения в родной город Цельсий принял участие в экспедиции французского астронома П.Мопертюи на север Швеции. Целью этой знаменитой «лапландской» экспедиции было измерение длины земного градуса вдоль меридиана в непосредственной близости к полюсу и сопоставление полученного результата с данными аналогичной экспедиции в Перу вблизи экватора (см. статью «Хорхе Хуан де Сантасилья» в «Кванте» №3 за 2006 г.). Экспедиции подтвердили гипотезу Ньютона о том, что форма Земли представляет собой уплощенный на полюсах эллипсоид, а участие Цельсия в этой экспедиции сделало его знаменитым. Это, в свою очередь, позволило Цельсию получить достаточные средства от шведских властей, чтобы оснастить астрономическую обсерваторию в Упсале наиболее современным оборудованием. Часть оборудования, правда, была закуплена Цельсием еще раньше во время длительного путешествия по Европе.

Обсерватория Цельсия открылась в 1741 году. В те годы задачей профессора астрономии считалось не только наблюдение за звездным небом, но и метеорология, и географические измерения. Он, в частности, внес важный вклад в картографию Швеции и установил, что уровень земель северных стран еще со времен таяния ледников медленно повышается над уровнем моря. Задолго до своего последователя Биркеланда Андерс Цельсий пришел к пониманию того, что северное сияние обусловлено магнитными явлениями, причем такой вывод он сделал, наблюдая отклонение стрелки компаса во время этого природного явления. Цельсий опубликовал каталог 300 звезд, используя созданную им самим фотометрическую систему. Идея этой системы заключалась в наложении друг на друга одинаковых полупрозрачных пластинок. Так, для исключения света от Сириуса, ярчайшей звезды на небе, ему потребовалось 25 пластинок.

Цельсий был активным сторонником введения Григорианского календаря в Швеции. Первая попытка замены Юлианского календаря здесь была предпринята еще в 1700 году, когда планировалось убирать по дню из високосных лет с 1700 по 1740 годы. Когда же 1704 и 1708 году были объявлены по ошибке високосными, Швеция вернулась к Юлианскому календарю. Уже после Цельсия Швеция ввела новый календарь, сдвинув старый календарь сразу на 11 дней.

Для метеорологических наблюдений Цельсий сконструировал свой знаменитый термометр, где в качестве нулевой точки отсчета, т.е. за 0 градусов, была принята температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении, а в качестве 100 градусов – температура ее замерзания. Уже после его ухода из жизни шкала Цельсия была обращена к ее современному виду. Благодаря точной фиксации методов и условий измерений, шкала Цельсия давала большую воспроизводимость и точность по сравнению с использовавшимися тогда шкалами Фаренгейта и Реомюра. В 1948 году единице температурной шкалы было официально присвоено наименование «градус Цельсия».

Хотя температуры кипения и замерзания воды приблизительно отвечают современным понятиям градуировки, формально исходное определение температурной шкалы Цельсия требует корректировки. Дело в том, что температуры кипения и замерзания воды зависят от атмосферного давления, которое, в свою очередь, зависит от определения температуры. В современной трактовке 0,01 °С устанавливается в тройной точке воды, а градус Цельсия равен 1/273,16 от разности между тройной точкой воды и абсолютным нулем температуры. Согласно этому определению, один градус по шкале Цельсия по абсолютной величине равен одному градусу по шкале Кельвина.

Для преобразования шкалы Цельсия в шкалу Кельвина надо использовать соотношение $K = 273{,}15 + C$, где K – температура по шкале Кельвина, а C – температура по шкале Цельсия. Для преобразования шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта надо использовать соотношение $F = 1{,}8\,C + 32$, где F – температура по шкале Фаренгейта. Шкала Реомюра в настоящее время практически не используется.

Виктор Васильевич Можаев (1938 – 2006)

С глубоким прискорбием сообщаем, что с нами больше нет Виктора Васильевича Можаева, одного из активных авторов и членов редколлегии журнала «Квант».

В.В.Можаев был блестящим педагогом, доцентом кафедры общей физики Московского физико-технического института, автором различных пособий и задачников для студентов и школьников, членом жюри многих Всероссийских олимпиад по физике.

Виктор Васильевич отличался незаурядной работоспособностью и абсолютной надежностью. В течение последних более чем пятнадцати лет, пока он вел раздел «Практикум абитуриента» по физике, редколлегия была спокойна – статья в номер будет, будет хорошая и, что важно, вовремя.

Мы с удовольствием общались с этим скромным, но очень достойным и интересным человеком. Нам будет очень не хватать Виктора Васильевича Можаева.

Редакционная коллегия, редакционный совет, редакция журнала «Квант»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2026» или «Ф2033». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2027–М2030, М2033 предлагалась на XXVIII Турнире городов, задача М2031 предлагалась на II Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2026 – М2035, Ф2033–Ф2042

М2026. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны, соответственно, точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45°$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ.

В.Произволов

М2027. На доске написаны три натуральных числа x, y, z. Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?

Е.Горский, С.Дориченко

М2028. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «верно ли, что этот человек хитрец?»).

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

Б.Гинзбург, М.Гервер

М2029. Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометрическая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.

Б.Френкин

М2030. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

Л.Радзивиловский

М2031. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность ω в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ω второй раз в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М2032. а) Существует ли такое натуральное n, что для любого натурального k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$, $n^k + 1$ имеет вид a^b для некоторых натуральных a и $b > 1$?

б*) Назовем натуральное число *антипростым*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Два натуральных числа назовем *близнецами*, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

В.Сендеров

М2033. У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

А.Шаповалов

М2034. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны, соответственно, точки X, Y, Z так, что треугольник XYZ подобен треугольнику ABC ($\angle X = \angle A$, $\angle Y = \angle B$). Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от точек пересечения высот треугольников ABC и XYZ.

Н.Николов (Болгария)

М2035. а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

б*) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на n групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

М.Малкин, И.Богданов, Г.Челноков

Ф2033. По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна $v = 2$ м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии $L = 40$ м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время $t = 40$ с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.

З.Рафаилов

Ф2034. По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис.1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.

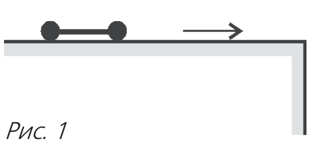


Рис. 1

А.Повторов

Ф2035. Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° – достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.

З.Простов

Ф2036. На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной $L = 0,2$ м и массой $M = 100$ г, посредине коробки покоится маленький шарик массой $m = 10$ г. Коробке ударом придают скорость $v = 10$ см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.

А.Шариков

Ф2037. В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Моль кислорода имеет массу 32 г, моль гелия – 4 г.

Г.Азов

Ф2038. С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?

А.Зильберман

Ф2039. Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превосходит 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам A и $Б$ схемы (рис.2) подключают измеряемое напряжение, между точками $В$ и $Г$ включают регулируемый источник напряжения – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.

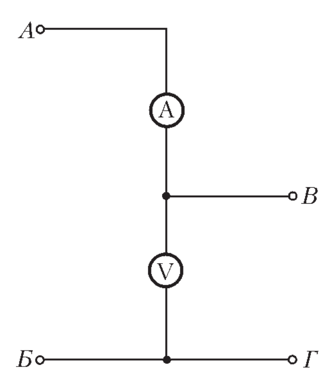


Рис. 2

З.Хитров

Ф2040. Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.

А.Старов

Ф2041. Источник переменного напряжения включен между точками *А* и *Б* цепи (рис.3). При какой частоте источника амплитуда напряжения, измеренного между точками *В* и *Г*, будет ровно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости $C = 10$ мкФ, катушки – индуктивности $L = 1$ Гн.

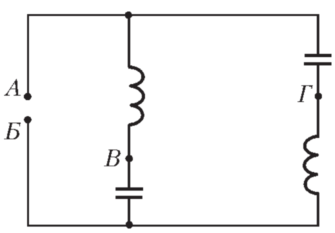


Рис. 3

Ф.Азов

Ф2042. На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам приклеены две одинаковые пружины жесткостью $k = 100$ Н/м каждая (рис. 4). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонтали. Координата точки *А* при этом изменяется по закону $x = 0{,}02\cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.

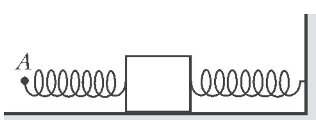


Рис. 4

М.Учителев

Решения задач М2006–М2010, Ф2018–Ф2027

М2006. *График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найдите p.*

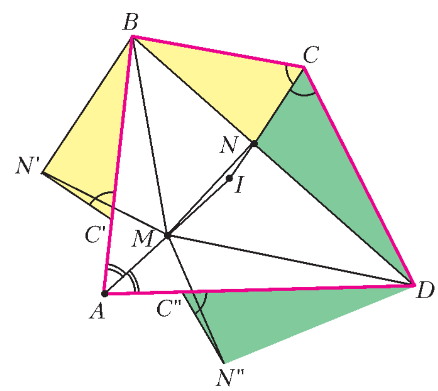
Ответ: $p = \frac{1}{4}$.

Пусть $y = l(x)$ – данная линейная функция. Тогда, из условия, $f(x) = l^2(x) + p$. Очевидно, $l(x)$ – непостоянная функция. Условие касания означает, что уравнение $l^2(x) + p = l(x)$ имеет единственное решение $x = x_0$. Но линейная функция, отличная от постоянной, каждое свое значение принимает ровно один раз. Значит, уравнение $l^2 + p = l$ должно иметь единственное решение $l = l_0$. Отсюда следует равенство нулю дискриминанта $D = 1 - 4p$, т.е. $p = \frac{1}{4}$.

Н.Агаханов

М2007. *Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что* $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. *Докажите, что* $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$.

Очевидно, *AI* и *CI* – биссектрисы углов *BAD* и *BCD* соответственно. Пусть для определенности $AB \ge BC$.



Рассмотрим поворот треугольника *BCN* вокруг точки *B*, переводящий его в треугольник $BC'N'$, где C' лежит на луче *BA*. Также рассмотрим поворот треугольника *DCN* вокруг точки *D*, переводящий его в треугольник $DC''N''$, где C'' лежит на луче *DA*. Имеем $BN = BN'$, $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABM + \angle CBN = \angle ABM + \angle C'BN' = \angle MBN'$. Отсюда следует, что треугольники *MBN* и MBN' равны, значит, $MN = MN'$.

Поскольку в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, $AC' = AB - BC = AD - DC = AC''$, поэтому точки C' и C'' симметричны относительно биссектрисы *AM* угла *BAD*. Далее, $C'N' = CN = C''N''$, $\angle BC'N' = \angle BCN = \angle DCN = \angle DC''N''$, значит, точки N' и N'' также симметричны относительно *AM*, отсюда $MN' = MN''$.

Таким образом, мы получили, что $MN = MN''$, следовательно, треугольники *DMN* и DMN'' равны по трем сторонам. Отсюда

$$\angle MDN = \angle MDN'' = \angle ADM + \angle C''DN'' = \\ = \angle ADM + \angle CDN = \angle ADC - \angle MDN,$$

т.е. $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$, что и требовалось.

Вычислительное решение можно получить, применив многократно теорему синусов к треугольникам *ABM*, *MBI* и т.д.

О.Поройкова (ученица 11 кл.)

М2008. *Назовем делитель натурального числа n маленьким, если он не превосходит n/10000, и большим – в противном случае. Конечно ли множество* *чисел, у которых произведение всех больших делителей, отличных от самого числа, равно произведению всех маленьких?*

Ответ: да.

В решении будем называть *большим* делителем числа большой делитель, меньший самого числа. Обозначим через $B(n)$ и $M(n)$ произведение всех больших и произведение всех маленьких делителей числа n соответственно. Если $B(n)=M(n)$, то число n назовем *удачным*.

Рассмотрим удачное число n и возьмем его некоторый большой делитель d (если таковых нет, то n – неудачное). Так как $1<\frac{n}{d}<10000$, то у числа $\frac{n}{d}$, а значит и у числа n, есть простой делитель $p < 10000$.

Предположим, у числа n имеется простой делитель $q > 10000$. Тогда каждый большой делитель d делится на q (иначе $d\le\frac{n}{q}<\frac{n}{10000}$), при этом $\frac{d}{q}$ – маленький делитель. Поставим в соответствие большому делителю d маленький делитель $\frac{d}{q}$. Очевидно, различным большим делителям соответствуют различные маленькие делители. В разложение на простые множители соответствующих делителей d и $\frac{d}{q}$ простое число p входит в равной степени. Кроме того, имеется маленький делитель $\frac{n}{q}$, который делится на p, но не поставлен в соответствие никакому большому делителю. Отсюда вытекает, что в разложение на простые множители числа $B(n)$ число p входит в меньшей степени, чем в разложение на простые множители числа $M(n)$, – противоречие с тем, что n удачное.

Итак, у n нет простых делителей, бóльших 10000. Тогда $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_k$ – все различные простые числа, меньшие 10000, а $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – некоторые целые неотрицательные числа. Множество удачных чисел, для которых $\alpha_i\le 20000$ для всех i = = 1, 2, ..., k, конечно. Пусть для некоторого i показатель $\alpha_i>20000$. Так как $p_i^{10000}>10000$, то $\frac{n}{p_i^{10000}},\frac{n}{p_i^{10001}},\ldots,\frac{n}{p_i^{20000}}$ – маленькие делители числа n. Отсюда $M(n)\ge\frac{n}{p_i^{10000}}\cdot\frac{n}{p_i^{10001}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{p_i^{20000}}\ge\frac{n^{10001}}{c}$, где $c=10000^{10001}\cdot10000^{10002}\cdot\ldots\cdot10000^{20000}$.

С другой стороны, большими делителями числа n могут являться только числа $\frac{n}{2},\frac{n}{3},\ldots,\frac{n}{9999}$, поэтому $B(n)\le\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{9999}<n^{10000}$. Из равенства $B(n)=$ $=M(n)$ следует, что $n^{10000}>\frac{n^{10001}}{c}$, откуда $n < c$, и множество таких n конечно.

П.Кожевников

М2009. *Даны $n > 1$ приведенных квадратных трехчленов $x^2-a_1x+b_1,\ldots,x^2-a_nx+b_n$, причем все $2n$ чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ является корнем одного из этих трехчленов?*

Ответ: не может.

Предположим противное. Поскольку все $2n$ коэффициентов различны, то они и составляют все множество корней наших трехчленов, причем у каждого из них два корня. Пусть α_i,β_i – корни трехчлена $x^2-a_ix+b_i$. Тогда по теореме Виета $a_i=\alpha_i+\beta_i,\ b_i=\alpha_i\beta_i$. Поскольку множество корней многочленов совпадает с множеством $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$, то

$$a_1+\ldots+a_n=(\alpha_1+\beta_1)+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)=$$
$$=(a_1+b_1)+\ldots+(a_n+b_n)=(a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n).$$

Следовательно, $b_1+\ldots+b_n=0$.

Далее, $\alpha_i^2+\beta_i^2=(\alpha_i+\beta_i)^2-2\alpha_i\beta_i=a_i^2-2b_i$. Отсюда

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)+\ldots+\left(a_n^2+b_n^2\right)=\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right)+\ldots+\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)=$$
$$=\left(a_1^2+\ldots a_n^2\right)-2\left(b_1+\ldots+b_n\right)=a_1^2+\ldots+a_n^2.$$

Значит, $b_1^2+\ldots+b_n^2=0$, т.е. все коэффициенты b_i равны нулю. Это противоречит тому, что они различны.

А.Бадзян

М2010*. *Для натуральных чисел m и n обозначим через $F(m,n)$ количество всех связных клеточных фигур в прямоугольнике $m\times n$. Докажите, что четность числа $F(m,n)$ совпадает с четностью числа $\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$. (Связная клеточная фигура – это такое непустое множество клеток, что из любой клетки этого множества можно пройти в любую другую клетку этого множества по клеткам этого множества, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)*

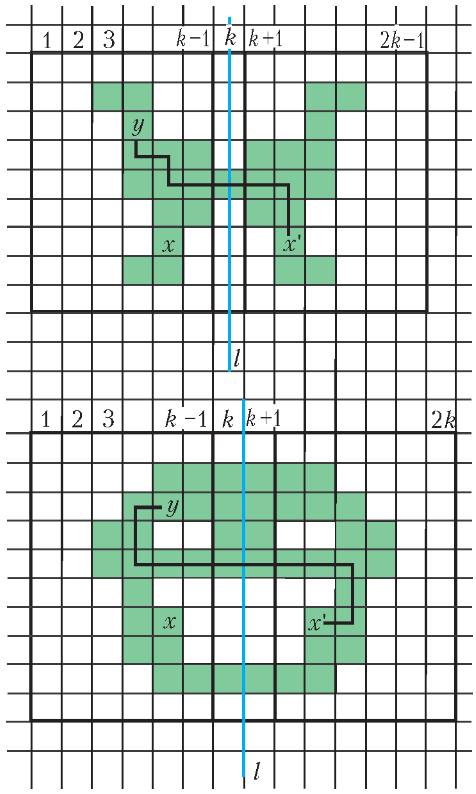
Положим $F(m,0)=0$. Связные фигуры в прямоугольнике $m\times1$ – это m фигур из одной клетки и полоски из двух или более клеток. Каждая полоска определяется парой клеток – первой и последней, поэтому $F(m,1)=m+\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}$.

Пусть в прямоугольнике m строк и $n>1$ столбцов. Обозначим через l вертикальную ось симметрии. Каждой связной фигуре соответствует фигура, симметричная относительно l, поэтому несимметричные относительно l фигуры разбиваются на пары, и четность $F(m,n)$ совпадает с четностью количества связных фигур, симметричных относительно l.

Рассмотрим некоторую фигуру T, симметричную относительно l.

Пусть n нечетно, $n = 2k - 1$, $k\ge2$. Фигура T содержит хотя бы одну клетку k-го столбца, иначе из клетки фигуры T невозможно пройти по клеткам T в симметричную относительно l клетку, переходя каждый раз в соседнюю клетку. Заметим, что часть T_1 фигуры T, расположенная в k самых левых столбцах, связна. Действительно, рассмотрим две клетки x и y фигуры T_1. Пусть x' – клетка, симметричная x относительно

l, а $x', z_1, z_2, \ldots, z_t, y$ – последовательность клеток, образующая путь из x' в y по соседним клеткам фигуры T. Тогда, заменяя в этом пути клетки, лежащие правее k-го столбца, на симметричные относительно l, мы получим путь из x в y по соседним клеткам фигуры T_1 (см. рисунок). Наоборот, если фигура T_1 расположена в прямоугольнике $m \times k$, состоящем из k самых



левых столбцов, связна и содержит хотя бы одну клетку k-го столбца, то можно однозначно продолжить фигуру T_1 до связной фигуры T, симметричной относительно l. Количество связных фигур в прямоугольнике $m \times k$ равно $F(m,k)$, среди них $F(m,k-1)$ фигур лежат в первых $k-1$ столбцах (т.е. не содержат клеток k-го столбца). Следовательно, количество связных симметричных относительно l фигур в прямоугольнике $m \times (2k-1)$ равно $F(m,k) - F(m,k-1)$.

Для четного $n = 2k$ ($k \geq 1$), рассуждая аналогично, установим взаимно однозначное соответствие между связными симметричными относительно l фигурами и связными фигурами, расположенными в первых k столбцах и содержащими хотя бы одну клетку k-го столбца. Отсюда вытекает, что количество связных симметричных относительно l фигур в прямоугольнике $m \times 2k$ равно $F(m,k) - F(m,k-1)$.

Итак, для $n = 2k - 1$ и $n = 2k$ четность $F(m,n)$ совпадает с четностью числа $F(m,k) - F(m,k-1)$.

Докажем индукцией по n, что $F(m,n)$ нечетно тогда и только тогда, когда m и n дают остаток 1 или 2 при делении на 4; отсюда сразу последует утверждение задачи. Утверждение верно при $n = 0$ и $n = 1$.

Пусть m дает остаток 0 или 3 при делении на 4. Предположим, что утверждение верно для $F(m,0)$, $F(m,1), \ldots, F(m,n-1)$, т.е. эти числа четные. Если $n = 2k - 1$, $k \geq 2$, или $n = 2k$, $k \geq 1$, то $n > k$, поэтому $F(m,n)$ четно, так как $F(m,k) - F(m,k-1)$ четно.

Пусть m дает остаток 1 или 2 при делении на 4. Предположим, что утверждение верно для чисел $F(m,0), F(m,1), \ldots, F(m,n-1)$, т.е. $F(m,s)$ нечетно тогда и только тогда, когда s дает остаток 1 или 2 при делении на 4. Тогда $F(m,s) - F(m,s-1)$ нечетно тогда и только тогда, когда s нечетно. Отсюда следует, что $F(m,n)$ нечетно тогда и только тогда, когда $n = 2(2l+1) - 1 = 4l + 1$ или $n = 2(2l+1) = 4l + 2$.

А.Бадзян

Ф2018. *Точка движется вдоль оси x, скорость точки пропорциональна квадрату ее координаты. Средняя скорость точки на участке (1 м; 2 м) составила 1 м/с. Найдите среднюю скорость на участках (2 м; 4 м) и (1 м; 4 м).*

Разобьем (мысленно!) каждый участок на N равных кусочков. Кусочки на отрезке (2 м; 4 м) вдвое длиннее, чем на отрезке (1 м; 2 м), зато скорости на кусочках с одинаковыми номерами отличаются в 4 раза. Итак, отрезок (2 м; 4 м) точка проедет в 2 раза быстрее, а длина его вдвое больше длины отрезка (1 м; 2 м) – средняя скорость на втором участке будет 4 м/с. Если теперь посмотреть на участок (1 м; 4 м), то со скоростью 1 м/с точка движется 1 с, участок (2м; 4 м) отнимает 0,5 с – всего точка проходит 3 м за 1,5 с. Значит, средняя скорость на этом участке равна 2 м/с.

З.Рафаилов

Ф2019. *На тонком и легком жестком стержне длиной L закреплены два тела – массой M посредине стержня и массой 2M на одном из его концов. Другой конец стержня закреплен шарнирно. Получившийся маятник раскачивается в вертикальной плоскости, максимальный угол отклонения от вертикали составляет 1°. Найдите период колебаний этого маятника и максимальную разность натяжений половин стержня при движении.*

Для нахождения периода колебаний значение максимального угла отклонения нас интересовать не должно – лишь бы этот угол был малым. Найдем связь между максимальным значением угла отклонения α_m и максимальным значением угловой скорости стержня $\frac{v_m}{L}$ (тут v_m – максимальная скорость нижнего груза массой $2M$) из закона сохранения энергии:

$$2Mg(L - L\cos\alpha_m) + Mg(0,5L - 0,5L\cos\alpha_m) =$$

$$= \frac{2Mv_m^2}{2} + \frac{M(0,5v_m)^2}{2}, \text{ откуда } v_m = \alpha_m\sqrt{\frac{10}{9}gL}.$$

Для гармонических колебаний с периодом T эта связь записывается так:

$$\frac{v_m}{L} = \alpha_m\frac{2\pi}{T}, \text{ откуда } T = \sqrt{\frac{18\pi^2 L}{5g}}.$$

Максимальная разность силы натяжения верхней половины стержня T_1 и силы натяжения нижней половины T_2 легко находится из уравнения движения тела массой M в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение:

$$T_1 - T_2 = Mg + \frac{M\left(0,5v_m\right)^2}{0,5L} = Mg\left(1 + \frac{5}{9}\alpha_m^2\right) =$$

$$= Mg\left(1 + \frac{5}{9}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\right) \approx Mg\left(1 + 1,7\cdot 10^{-4}\right).$$

Р.Простов

Ф2020. *Крыло аиста имеет поперечную площадь 2 м^2, оно движется вниз с постоянной скоростью 2 м/с в течение интервала времени 0,2 с и столько же времени – вверх. Может ли аист при собственной массе 2 кг лететь на постоянной высоте с грузом массой 3 кг? Для тех, кто не видел аиста: у него ровно два крыла.*

Если считать, что при движении крыла со скоростью v аист «отбрасывает» вниз порцию воздуха со скоростью v, то нужно разумно оценить объем (массу) этой порции. Максимальная величина – порция воздуха в объеме $V = 2Sv\tau \approx 2\cdot 2\ \text{м}^2\cdot 2\ \text{м/с}\cdot 0,2\ \text{с} = 1,6\ \text{м}^3$ (заметаемый крылом объем), ее масса составляет $m = \rho V \approx \approx 1,2\ \text{кг/м}^3 \cdot 1,6\ \text{м}^3 \approx 2\ \text{кг}$. За время $\tau = 0,2$ с передается импульс $mv \approx 4\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$, т.е. действует сила

$$F = \frac{mv}{\tau} \approx \frac{4\ \text{кг}\cdot\text{м/с}}{0,2\ \text{с}} = 20\ \text{Н}.$$

Такой силы достаточно только для того, чтобы самого аиста поддерживать в воздухе.

При расчете мы учитывали только отброшенный вниз воздух, считая, что при движении крыла вверх воздух его плавно обтекает. Для того чтобы нести груз, например качан капусты массой 3 кг, аист должен захватывать и отбрасывать вниз почти втрое бóльшую порцию воздуха!

А.Птицын

Ф2021. *В глубинах космоса, вдали от всех других тел, летает жидкая планета из ртути – огромный однородный шар. Ускорение свободного падения на поверхности планеты составляет 1000 м/с^2. Стальной шарик объемом 1 см^3 находится на расстоянии трети радиуса планеты от ее центра. Найдите полную силу, которая действует на шарик. Плотность ртути 13,6 г/см^3, плотность стали 7,8 г/см^3.*

Если бы вместо стального шарика был такой же по размерам «ртутный шарик», то действующие на него силы были бы уравновешены (ну, это очевидно!). При этом сила притяжения к центру планеты была бы уравновешена разностью сил давления жидкости.

Если снова посмотреть на стальной шарик, то станет ясно, что разность сил давления останется той же, а гравитационная сила уменьшится, значит, результирующая сила будет направлена от центра. Гравитационная сила создается только «внутренней» частью шарообразной планеты, сила притяжения там в 3 раза меньше, чем у поверхности.

Окончательно, сила, действующая на шарик, равна

$$F = \frac{1}{3}\rho_{\text{рт}}Vg - \frac{1}{3}\rho_{\text{с}}Vg = \frac{1}{3}Vg\left(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{с}}\right) =$$

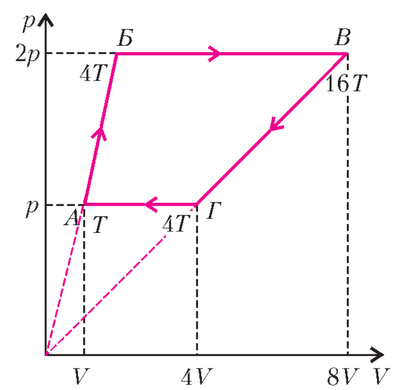
$$= \frac{1}{3}\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3\cdot 10^3\ \text{м/с}^2\cdot\left(13,6\cdot 10^3 - 7,8\cdot 10^3\right)\ \text{кг/м}^3 \approx$$

$$\approx 2\ \text{Н}.$$

Железный шарик в жидкой ртути всплывет на поверхность.

З.Шариков

Ф2022. *Порция разреженного гелия находится в сосуде с поршнем. С гелием проводят замкнутый тепловой цикл, который состоит из четырех стадий. На первой стадии газ расширяется вдвое, при этом давление газа все время пропорционально его объему. На второй стадии газ продолжает расширяться – но уже при неизменном давлении, объем газа на этой стадии увеличивается еще в 4 раза. Следующая стадия – давление газа снова пропорционально его объему, газ охлаждается, пока его давление не упадет вдвое. И, наконец, четвертая стадия – охлаждение при неизменном давлении до начального состояния. Найдите термодинамический КПД этого цикла.*



Газ получает тепло на участках $АБ$ и $БВ$ (см. рисунок). Общее полученное количество теплоты равно:

$$Q_{АБ} = \frac{3}{2}pV + \nu C_V\left(4T - T\right), \quad Q_{БВ} = \nu C_p\left(16T - 4T\right),$$

$$Q = Q_{АБ} + Q_{БВ} = \frac{3}{2}pV + \frac{3}{2}\nu R\cdot 3T + \frac{5}{2}\nu R\cdot 12T = 36pV.$$

Работу найдем как площадь, ограниченную графиком цикла:

$$A = \frac{1}{2}pV + 2pV + 2pV = 4,5pV.$$

Термодинамический коэффициент полезного действия этого цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{4,5pV}{36pV} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

Р.Циклов

Ф2023. *На горизонтально расположенном непроводящем стержне закреплены два маленьких тела, заряженных положительно (заряды нам неизвестны). Еще одно положительно заряженное тело – маленькая бусинка – может двигаться без трения вдоль стержня. Бусинка совершает малые колебания около положения равновесия. Во сколько раз изменится период таких колебаний, если расстояние между неподвижными зарядами уменьшится вдвое (разумеется, их для этого придется сделать на некоторое время подвижными)?*

Пусть один из неподвижных зарядов равен Q и расстояние от него до равновесного положения бусинки с зарядом q составляет l. Тогда для второго заряда, равного nQ, это расстояние составит $l\sqrt{n}$. Сместим теперь заряд q вдоль прямой на очень малое расстояние x в сторону заряда nQ. Тогда сила, действующая на бусинку, будет равна

$$F = k\frac{Qq}{(l+x)^2} - k\frac{nQq}{\left(\sqrt{n}l - x\right)^2} =$$

$$= \frac{kQq}{l^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2} - \frac{n}{\left(\sqrt{n}-\frac{x}{l}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{kQq}{l^2}\frac{n - 2\sqrt{n}\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} - n - 2n\frac{x}{l} - n\frac{x^2}{l^2}}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2\left(\sqrt{n}-\frac{x}{l}\right)^2} =$$

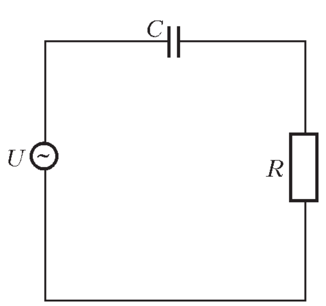
$$= \frac{kQq}{nl^2}\frac{2x}{l}\left(-\sqrt{n}-n\right)$$

(мы пренебрегаем слагаемыми вида x^2/l^2 по сравнению с величинами x/l). Видно, что

$$F \sim \frac{1}{l^3}, \text{ т.е. } \omega^2 \sim \frac{1}{l^3}, \text{ или } T = \frac{2\pi}{\omega} \sim l^{3/2}.$$

Значит, период колебаний станет меньше в $2\sqrt{2}$ раз.

А.Простов



Ф2024. *К обычной сети 220 В, 50 Гц подключены последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и нагреватель – резистор. Найдите максимальную мощность такого нагревателя. Кстати – зачем там понадобился конденсатор?*

Ток в цепи (его действующее значение) равен (см. рисунок)

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Тепловая мощность нагревателя равна

$$P = I^2 R = \frac{U^2 R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Проще найти минимум обратной величины, т.е.

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{U^2}\left(R + \frac{1}{\omega^2 C^2 R}\right).$$

Видно, что минимум соответствует сопротивлению

$$R = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 10^{-6}} \text{ Ом} \approx 3{,}2\cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

При этом максимальная мощность нагревателя будет равна

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2R} \approx \frac{220^2}{2\cdot 3{,}2\cdot 10^3} \text{ Вт} \approx 7{,}6 \text{ Вт}.$$

Конденсатор нужен потому, что он «гасит» часть сетевого напряжения, а тепло на нем не выделяется. Это удобно, если прибор (например, паяльник) рассчитан на низкое напряжение питания (часто можно встретить приборы на 36 В), а трансформатор дорог и не очень удобен.

А.Зильберман

Ф2025. *К «мостику» из конденсаторов (рис.1) подключили батарейку напряжением U_0, затем ее отключили, а между точками А и Б включили катушку индуктивностью L. Найдите максимальный ток через катушку. Найдите также полный заряд, протекший через катушку, и выделившееся в ней количество теплоты. Сопротивление соединительных проводов очень мало, сопротивление провода, которым намотана катушка, считать небольшим.*

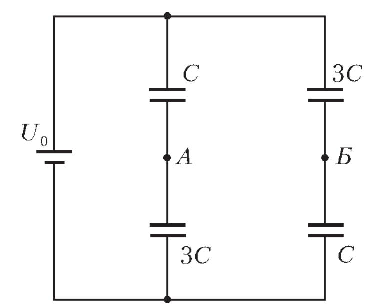


Рис. 1

После отключения батарейки каждый конденсатор имеет заряд $q = \frac{3}{4}CU_0$, и полная энергия системы равна

$$W_1 = \frac{3}{4}CU_0^2.$$

Пусть в момент, когда $\varphi_A = \varphi_Б$ (при максимальном токе катушки индуктивности) заряды конденсаторов слева Q_1 и Q_2 (рис.2), тогда справа заряды будут Q_2 и Q_1 (симметрия тут очевидна). Для равенства потенциалов φ_A и $\varphi_Б$ нужно, чтобы выполнялось такое соотношение между зарядами: $Q_2 = 3Q_1$. Из закона сохранения заряда (верхние пластины конденсаторов емкостями C и $3C$) получим

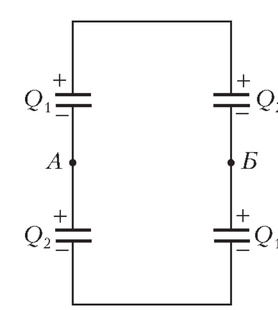


Рис. 2

$$Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2}CU_0.$$

Отсюда находим

$$Q_1 = \frac{3}{8}CU_0 \text{ и } Q_2 = \frac{9}{8}CU_0.$$

Теперь общая энергия конденсаторов равна

$$W_2 = 2\left(\frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{6C}\right) = \frac{9}{16}CU_0^2.$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$W_1 = W_2 + \frac{LI_m^2}{2},$$

откуда

$$I_m = \sqrt{\frac{2(W_1 - W_2)}{L}} = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{CU_0^2}{L}}.$$

Перетекающий через катушку заряд посчитать легко: вначале суммарный заряд пластин, подключенных к точке A, был нулевым, теперь он равен

$$Q = -Q_1 + Q_2 = \frac{3}{4}CU_0.$$

Значит, столько и перетекло через катушку.

В тепло уйдет «бывшая» энергия катушки, подсчитанная для случая $\varphi_A = \varphi_Б$:

$$W_{\text{тепл}} = W_1 - W_2 = \frac{3}{16}CU_0^2.$$

При решении мы считали, что за часть периода колебаний до достижения максимального тока через катушку только малая часть энергии системы перейдет в тепло.

Р.Старов

Ф2026. *Для задержки во времени звуковых сигналов в прежние годы часто использовали массивную пружину, вдоль которой распространялась упругая волна. Итак, длинная однородная пружина лежит на гладком горизонтальном столе. За один конец пружину начинают растягивать, при этом ее длина увеличивается за 1 с на 5 см. Через какое время упругая волна добежит до второго конца пружины? Длина всей пружины 5 м, полная ее масса 2 кг, а жесткость 100 Н/м.*

Для того чтобы конец пружины двигался с постоянной скоростью $v = 5$ см/с, нужно прикладывать неизменную силу F – во всяком случае, до того момента, когда упругая волна добежит до второго конца пружины и он придет в движение. Обозначим скорость упругой волны в пружине буквой c, тогда искомый интервал времени будет равен $T = \frac{L}{c}$, где L – длина пружины. Пусть от начала движения прошло время $\tau < T$. Тогда длина «работающей» части пружины равна $c\tau$ и растянута на $x = v\tau$. Для этой части жесткость равна $k^* = k\frac{L}{c\tau}$, и сила упругости составляет

$$F = k^*x = k\frac{L}{c\tau}v\tau = kL\frac{v}{c}.$$

С другой стороны, со временем меняется импульс пружины – за счет вовлечения все новых ее частей в движение со скоростью v:

$$F\tau = m^*v = m\frac{c\tau}{L}v, \text{ откуда } F = \frac{mcv}{L}.$$

Сравнивая два выражения для силы F, получаем

$$kL\frac{v}{c} = \frac{mcv}{L}, \text{ или } c^2 = \frac{kL^2}{m}.$$

Отсюда находим искомое время:

$$T = \frac{L}{c} = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{2\ \text{кг}}{100\ \text{Н/м}}} = 0{,}14\ \text{с}.$$

Интересно, что ответ не зависит от длины пружины. На самом деле, зависит – длина «спрятана» в значения массы и жесткости. Если увеличить длину пружины, не меняя свойств отдельных витков, то изменятся и масса m, и жесткость k. В результате, если увеличить число витков, например, вдвое (длина при этом будет $2L$), то масса увеличится вдвое, жесткость уменьшится вдвое и время запаздывания также увеличится вдвое. А вот от скорости движения конца пружины ответ и в самом деле не зависит – лишь бы она была мала по сравнению со скоростью распространения упругой волны.

Р.Александров

Ф2027. *Дно очень узкого и глубокого колодца квадратного сечения освещают подвешенной на уровне земли маленькой лампочкой, равноудаленной от его стенок. Стенки колодца зеркальные, но покрыты тонким ровным слоем пыли, так что отражается только 98% энергии падающего света. Во сколько раз темнее станет в центре дна колодца, когда пыли со временем станет в 2 раза больше?*

Заметим, что когда пыли станет в 2 раза больше, коэффициент отражения уменьшится от 0,98 до 0,96 (поглощается вдвое больше).

Стоя на дне колодца, мы видим над головой настоящий источник света, т.е. лампочку, и множество мнимых источников, расположенных по центрам смежных друг с другом квадратов. Яркость мнимого источника зависит от соответствующего числа отражений от стенок. Например, если мнимый источник находится на m «клеточек» правее и на n «клеточек» выше, то число отражений, которое испытает луч, идущий к нам от этого источника, будет $m + n$. Примем освещенность от истинной лампочки за единицу. Тогда освещенность от указанного мнимого источника будет $E = k^{m+n}$, где k – коэффициент отражения. Здесь мы пренебрегаем изменением расстояния до источника, так как основной вклад в освещенность будут давать близкие к истинному источники. Как легко заметить, существуют такие мнимые источники, что отрезок, соединяющий их с центром дна (где мы стоим), содержит вершину квадрата. Очевидно, что в очень близкой к нам точке дна освещенность от такого источника будет описываться приведенной выше формулой, поскольку отрезок уже не будет содержать вершин.

Итак, осталось сложить освещенности от всех источников. Сначала сложим все источники с определенным m:

$$k^{m+0} + 2k^{m+1} + 2k^{m+2} + \ldots = \frac{1+k}{1-k}k^m.$$

А теперь сложим все m:

$$E_{\text{полная}} = \frac{1+k}{1-k}\left(k^0 + 2k^1 + 2k^2 + \ldots\right) = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2.$$

Подставим значения $k = 0{,}98$ в первом случае и $k = 0{,}96$ во втором: $E_{\text{полная 1}} = 0{,}9801$, $E_{\text{полная 2}} = 0{,}2401$. Видно, что темнее станет приблизительно в 4 раза.

Е.Антышев

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета (МГУ) имени М.В.Ломоносова работает Малый механико-математический факультет (МММФ), состоящий из заочного и вечернего отделений. За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – расширение математического кругозора школьников и углубление их знаний как по темам школьной программы, так и по разделам математики, не входящим в программу средней школы.

В 2007 году *заочное отделение* Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2007/08 учебный год в 8 и 9 классы. На заочное отделение принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Прибалтики.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию *одну* работу и оплачивает обучение всей группы как обучение *одного* учащегося.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2007 года, после проверки вступительных работ. В 2006/07 учебном году стоимость проверки одного задания составляет 120 руб. (для коллективных учеников – 160 руб.), однако в 2007/08 учебном году она может быть повышена. За год учащийся выполняет 6–9 заданий. Школьники, успешно (с оценкой «хорошо» или «отлично») закончившие обучение на заочном отделении, получают свидетельства об окончании Малого мехмата (прошедшим курс обучения по форме «Коллективный ученик» вместо свидетельств выдаются справки об окончании Малого мехмата).

Зачисление на заочное отделение Малого мехмата (как в 8, так и в 9 класс) для индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы. Желающие поступить должны *не позднее 30 апреля 2007 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить *в школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Фамилия, имя, отчество учащегося
2) Класс (*в 2007/08 учебном году*)
3) Полный домашний адрес *с указанием индекса почтового отделения*
4) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
5) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее 20 сентября 2007 года* выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1) Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2) Фамилии, имена и отчества учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
3) Класс (*в 2007/08 учебном году*)
4) Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием индекса почтового отделения*
5) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
6) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш почтовый адрес: 119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ

Электронная почта: mmmf_z@mech.math.msu.su

Вечернее отделение Малого мехмата приглашает на занятия по субботам всех желающих школьников 6–11 классов из Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону: 939-39-43 или по электронной почте: mmmf_v@mech.math.msu.su

Более подробную информацию о Малом мехмате можно найти на нашем сайте в Интернете по адресу:

http://mmmf.math.msu.su

Вступительная работа

1. Один землекоп может вырыть яму за два часа, другой выроет такую же яму за три часа, третий – за шесть часов. За какое время три землекопа выроют яму, работая вместе?

2. Известно, что $0 \le a \le b \le c \le 1$. Докажите, что

$$1-(1-a)(1-b)(1-c) \ge c .$$

3. Существует ли выпуклый четырехугольник, в котором каждая из сторон больше каждой из диагоналей?

4. В строку выписаны подряд все целые числа от 1 до 10000. Сколько из них содержат в своей записи цифру «3»?

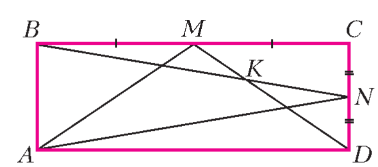
5. Решите систему

$$\begin{cases} xy = 9z, \\ yz = 100x, \\ xz = 4y \end{cases}$$

(не забудьте указать все решения).

6. Сумма нескольких чисел равна 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше $\frac{1}{1000}$?

7. Доля шахматистов среди математиков больше, чем доля шахматистов среди всех людей. Что больше: доля математиков среди шахматистов или доля математиков среди всех людей?



8. В прямоугольнике $ABCD$ отмечены точка M – середина стороны BC, точка N – середина стороны CD, точка K – точка пересечения отрезков BN и MD (см. рисунок). Докажите, что $\angle MKB = \angle MAN$.

9. Докажите равенство

$$\underbrace{22\ldots2}_{n} + \underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n} .$$

10. Двадцать футбольных команд провели первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда сыграла с каждой по одному разу). Могло ли случиться так, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и свела вничью?

Задачи

1. Корабль считается попавшим в окружение, если он находится внутри выпуклого многоугольника, в вершинах которого располагаются корабли противника. Вы находитесь на капитанском мостике и в бинокль можете наблюдать все корабли противника. Как определить, попали вы в окружение или нет?

Г.Гальперин

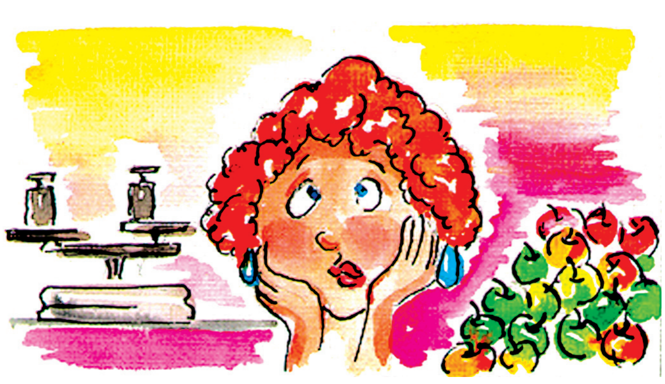
2. Существуют ли попарно неравные целые числа a, b, c, d такие, что

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ac+1}{bd+1}\ ?$$

В.Сендеров

3. Гирьки массой 1, 2, 3, ..., n граммов ($n > 6$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Можно ли убрать с чашек три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось?

А.Шаповалов



4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, у которого есть угол, отличающийся от прямого не более чем на 15°. Почти равнобедренным будем называть треугольник, у которого есть два угла, отличающиеся не более чем на 15°. Верно ли, что любой остроугольный треугольник почти прямоугольный или почти равнобедренный?

В.Гуровиц

5. По правилам регби, если игроку удается прижать мяч к земле в специальной зачетной зоне (это называется попыткой), его команда получает 5 очков и, кроме того, игроку дается право пробить мячом по воротам, т.е. выполнить реализацию. При попадании команда дополнительно зарабатывает 2 очка.

Во время игры между командами «Рубильник» и «Дробильник» у команды «Рубильник» удачная реализация имела место в половине случаев, а у команды «Дробильник» — лишь в четверти всех случаев. Кто победил и с каким счетом, если обе команды в сумме набрали ровно 100 очков?

И.Акулич

Иллюстрация Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

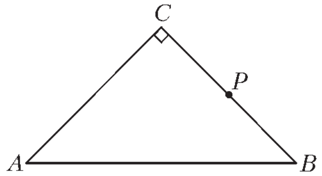
Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Из 80 первых натуральных чисел выбрали 20 нечетных и 20 четных чисел с равными суммами. Докажите, что среди выбранных найдутся два числа, сумма которых равна 81.

В.Произволов

17. В прямоугольном равнобедренном треугольнике отмечена точка P пересечения его катета с биссектрисой противолежащего угла. Используя только циркуль произвольного, но фиксированного раствора, постройте центр вписанной окружности данного треугольника.



Р.Сарбаш

18. а) Придумайте натуральные числа $a > b > c > 10^{10}$ такие, что тройка $(a,\ b,\ c)$ не имеет отличного от 1 общего делителя и

$a^8 + b^8 + c^8$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$,

$a^4 + b^4 + c^4$ делится на $a^2 + b^2 + c^2$,

$a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$.

б) Придумайте числа $A > B > C > a > b > c > 10^{10}$ такие, что в каждой тройке $(A,\ B,\ C)$, $(a,\ b,\ c)$ числа не имеют отличного от 1 общего делителя и

$A^2 + B^2 + C^2$ делится на $a + b + c$,

$a^2 + b^2 + c^2$ делится на $A + B + C$.

В.Произволов, В.Сендеров

19. Рациональное число $\dfrac{p}{q}$ назовем хорошим, если можно найти $p + q$ последовательных натуральных чисел, сумма первых p из которых равна сумме остальных q. Укажите множество всех хороших рациональных чисел.

А.Малеев

20. Каждая клетка шахматной доски разрезана по одной из ее диагоналей. На какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество частей может оказаться разделенной доска этими разрезами?

И.Акулич

В 1987 году в издательстве «Мир» вышла книга «Алиса в Стране Смекалки» блестящего популяризатора науки Рэймонда М. Смаллиана – такого же остроумного выдумщика, как и автор знаменитых сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье» Льюис Кэрролл. Читая «Алису в Стране Смекалки», трудно понять, где Смаллиан, а где Кэрролл:

« – Считает ли тот, кто не в своем уме, человек или какое-нибудь существо, что дважды два – пять? – спросила Алиса.

– Конечно, дитя мое! – ответила Герцогиня. – Поскольку дважды два не пять, то тот, кто не в своем уме, считает, что дважды два – пять.

– А считает ли тот, кто не в своем уме, что дважды два – шесть? – задала новый вопрос Алиса.

– Конечно, дитя мое. Поскольку дважды два не шесть, то тот, кто не в своем уме, считает, что дважды два – шесть.

– Но дважды два не может быть одновременно равно и пяти и шести! – воскликнула Алиса.

– Разумеется, не может, – согласилась Герцогиня. – И ты и я об этом знаем, но тот, кто не в своем уме, об этом не ведает. А какая мораль из всего этого?...»

Основное содержание книги Смаллиана – логическая игра, загадки и головоломки.

Предлагаем вашему вниманию развитие темы «Самое запутанное дело» из главы «Что не мог точно вспомнить Белый Рыцарь».

САМОЕ ЗАПУТАННОЕ ДЕЛО-2

В.КИТАЙСКИЙ

Алиса, выйдя на опушку леса, увидела невдалеке своего давнего знакомого, Белого Рыцаря, стоявшего рядом со своим верным конем. Их встреча была радостной, и Белый Рыцарь засыпал Алису вопросами о ее приключениях в Стране Чудес. Девочка охотно рассказала ему о своих похождениях и о суде, на котором она побывала в конце своего пребывания там.

— Я тоже недавно побывал на одном процессе в Королевском Суде, — заметил Белый Рыцарь. — Но судили, кажется, не меня.

— Как интересно! Расскажите! — попросила Алиса.

— А, вспомнил! На судебном процессе, о котором я хочу тебе рассказать, — начал Белый Рыцарь, — подсудимых было четверо, и только один из них был виновен. Да ты их всех, кстати, знаешь! — обрадованно воскликнул он. — Это твои старые знакомые из Страны Чудес: Мартовский Заяц, Чеширский Кот, Болванщик и Лакей-Лещ.

Когда Мартовского Зайца спросили, виновен ли Болванщик, то он ответил либо «да» , либо «нет», но что именно он ответил, я не помню. Чеширскому Коту строгий судья, Червонный Король, задал один-единственный вопрос: «Виновен ли Лакей-Лещ?» Что он ответил — сейчас я уже позабыл, но точно помню, что он сказал либо «да», либо «нет».

У Болванщика помощник судьи, Пиковый Валет, поинтересовался о правдивости показания Чеширского Кота, но я совершенно запамятовал его ответ. После короткого перерыва суд возобновил работу, и был допрошен последний подозреваемый, Лакей-Лещ. Второй помощник судьи, Трефовый Валет, задал ему довольно-таки замысловатый вопрос: «Верно ли, что Чеширский Кот виновен, а Мартовский Заяц сказал правду?» То ли Лакей-Лещ сказал «да», то ли ответил «нет», сейчас уже вылетело у меня из головы. Зато я помню, как сейчас, что из всех показаний только два были ложными.

В прошлом месяце, — продолжал Белый Рыцарь, — я встретил Бармаглота и рассказал ему все, о чем ты уже знаешь. В то время я еще помнил, что именно говорил каждый из четырех подсудимых (т.е. «да» или «нет»), и когда сообщил Бармаглоту их показания, он без труда сумел определить виновного.

— Знаю, знаю! — перебила его Алиса. — Дальше вы скажете, что, будь у меня дополнительные сведения о Бармаглоте, я непременно должна была бы решить эту задачу. Ведь правильно?

— Нет,— задумчиво произнес Белый Рыцарь. — Для того чтобы ты смогла решить задачу, этих данных недостаточно.

— А что мне еще необходимо знать? — спросила Алиса.

— А вот что, — продолжал Белый Рыцарь. — Через неделю после моего разговора с Бармаглотом я встретил Плотника, большого знатока и любителя такого рода вопросов, и рассказал ему все, о чем ты уже знаешь. Разумеется, Плотник смог продвинуться в решении задачи ничуть не дальше, чем ты. Однако, подумав, он спросил:

«Все ли подозреваемые ответили «да»?». Ответ тогда еще был мне известен, и я откровенно сообщил его Плотнику. Поразмышляв немного, он сказал:«А не могли бы вы вспомнить, говорил ли суду Мартовский Заяц правду или же он лгал?» И на этот вопрос я дал ему ответ, но это не помогло: Плотник так и не смог решить задачу.

— Интересно получается! — воскликнула Алиса. — Плотник, зная все то же самое, что и я, не смог решить задачу, а я — должна ее решить?

— Разумеется, нет, — успокоил ее Белый Рыцарь, — мой рассказ еще далеко не окончен.

— Еще через неделю, — продолжал Белый Рыцарь, — я повстречал Моржа и рассказал ему все то, о чем только что рассказал тебе. Морж после долгого раздумья задал мне вопрос о правдивости показаний Чеширского Кота. Правда, сейчас я уже позабыл, что ответил ему, а тогда я дал исчерпывающий ответ. Но, несмотря на столь обширные сведения, Морж так и не смог определить, кого же суд признал виновным.

— Неужели вы думаете, что если Морж и Плотник не смогли решить, кто же виновный, — спросила Алиса, — то это смогу сделать я? Или вы еще, может быть, что-нибудь вспомните или расскажете?

— Ну, конечно же, расскажу, — ответил радостно Белый Рыцарь. — Я еще очень многое помню и ничего не скрою от тебя. Вскоре после встречи с Моржом я зашел на чаепитие к Соне-Мыши и во время беседы с ней упомянул об этом процессе, рассказав ей все, что только что рассказал тебе, и, кроме того, сообщил ей о том, что Чеширский Кот и Болванщик то ли оба солгали, то ли оба сказали правду, то ли один из них сказал правду. Но, к сожалению, эта информация ей не помогла: Соня не смогла решить эту непростую задачу.

— Вот еще что, — продолжал он свой рассказ. — Полмесяца назад, прогуливаясь по берегу моря, я встретил своего друга, Грифона, и во время нашего разговора вспомнил об этом непростом деле. Грифон очень им заинтересовался, и я все без утайки рассказал ему. Он внимательно выслушал меня, а затем надолго задумался. Потом он спросил, не помню ли я, что ответил на суде Мартовский Заяц: «да» или «нет». Получив от меня ответ и подумав еще немного, он так и не сумел решить, кто же был виноват.

На другой день после встречи с Грифоном, гуляя по лесу, я встретил Траляля. Рассказав ему о своих встре-

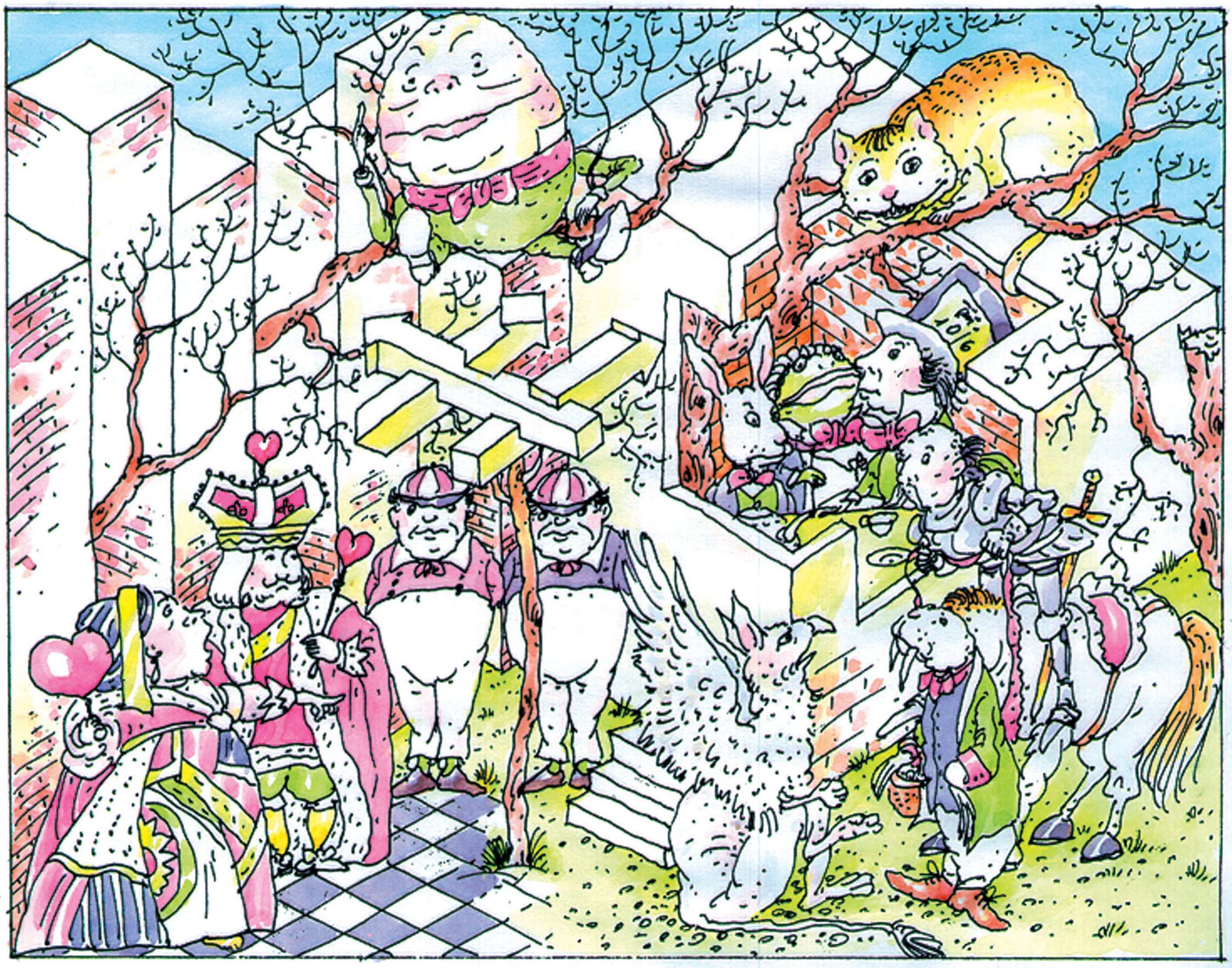


Иллюстрация В.Иванюка

чах с Бармаглотом, Плотником, Моржом, Соней и Грифоном, я надеялся, что уж он-то назовет мне имя виновного, тем более что я сообщил ему еще кое-что об истинности показаний виновного: то ли что виновный солгал, то ли что виновный сказал правду. Но, к большому моему разочарованию, и он тоже не смог назвать имя того, кого суд признал виновным.

Спустя некоторое время я встретил второго из братцев, Труляля. Вспоминая разные интересные истории, я рассказал ему о ходе недавно закончившегося процесса все то же самое , что только что услышала от меня ты, только не сказал ему о встречах с Грифоном и Траляля, но зато вспомнил показание на суде одного из подозреваемых, о чем и сообщил ему. Что это было за показание, «да» или «нет», и чье оно, сейчас я уже не могу точно вспомнить, но что-то я ему все же сообщил. Тем не менее, Труляля так и не смог назвать мне имя виновного.

— Ваш рассказ становится все более интересным, — в задумчивости произнесла Алиса. — Впрочем, извините, что перебила! Продолжайте, прошу вас!

— Вчера во время прогулки я встретил нашего общего знакомого Шалтая-Болтая и рассказал ему все, о чем ты уже знаешь. И о встрече с Бармаглотом, который успешно решил задачу, и о том, как бились над ней Морж, Плотник, Соня, Грифон, Траляля и Труляля, но вынуждены были отступить, несмотря на то что располагали дополнительными сведениями. Шалтай-Болтай тотчас же извлек карандаш и блокнот и принялся что-то писать. Наконец, он покачал головой и произнес:

— Данных недостаточно! Вот если бы вы, уважаемый Рыцарь, смогли припомнить, о ком из подсудимых вы сказали Труляля, то тогда, возможно, и я назвал бы вам имя виновного.

— К счастью, — закончил Белый Рыцарь, — именно об этой встрече и о подробностях разговора с Труляля я помнил, о чем и сообщил Шалтаю-Болтаю, после чего тот назвал мне имя виновного.

— Так кто же он? — чуть не закричала от восторга Алиса.

— А вот этого я уже и не помню, — ответил Белый Рыцарь.

Но Алиса все же решила эту задачу. А вы?

Мосты и парашюты

В.ВЫШИНСКИЙ

Казалось бы, что общего между парашютом и ... мостом?

Мосты строили тысячи лет, причем это дело считалось настолько важным, что понтификами (pontifices), буквально – строителями мостов, в Древнем Риме называли жрецов, а в настоящее время так называют римских пап. А парашют изобретен всего около ста лет назад (Г.Е.Котельников, 1911 г.). Кроме того, приличный мост весит сотни и тысячи тонн (рис.1), а парашют помещается в ранце. И все же, с

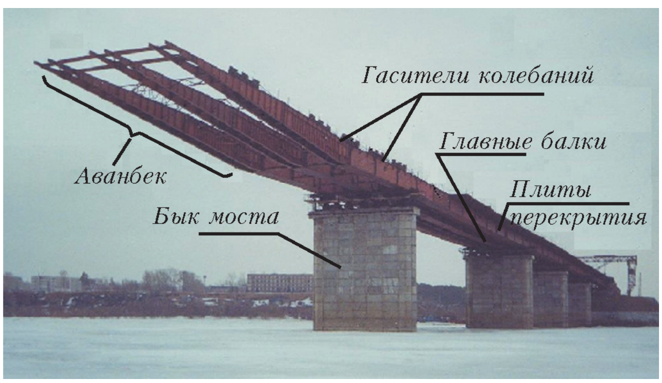


Рис.1. Монтаж моста через реку Томь в городе Томске

точки зрения аэродинамики, в них есть нечто общее: и мост и парашют – плохообтекаемые тела. А что значит – плохо или хорошо? Если при обтекании тела струйки воздуха разделяются в его носовой области и затем вновь соединяются в кормовой точке – это хорошо для самолета или дирижабля, потому что при этом сила сопротивления минимальна. Но парашют в принципе должен иметь как можно большее сопротивление, т.е. быть плохообтекаемым. Встречные струйки тока воздуха, разделившись перед плохообтекаемым телом, уже не соединяются за ним, а образуют вихри. Как говорят аэродинамики, образуется отрыв потока. На рисунке 2 это явление изображено для случая обтекания стержней прямоугольного сечения, например элементов конструкции моста. Таким образом, можно сказать, что общей чертой,

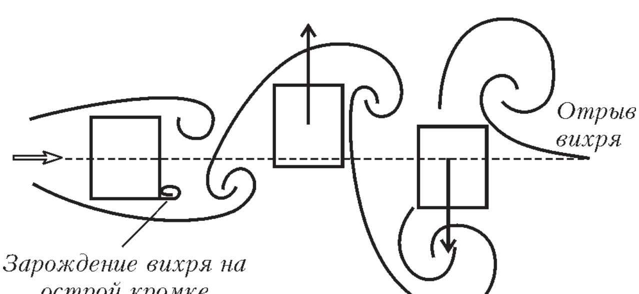


Рис. 2. Раскачка многобалочной конструкции при отрывном обтекании

объединяющей мосты и парашюты, является отрывное обтекание их воздухом.

Рассмотрим систему двух тел: спускаемый аппарат (СА) + парашют (П) и мост на этапе строительства методом продольной надвижки, когда многобалочная система, пока что облегченная от плит перекрытия, выдвигается от одного быка моста к другому (см. рис.1). И там и здесь мы имеем систему нескольких плохообтекаемых тел и существенно нестационарный (т.е. изменяющийся со временем) отрывной характер течения воздуха. При исследовании таких течений можно считать, что обтекание всех угловых кромок происходит с отрывом потока, а характер обтекания всей системы тел зависит от расстояния между телами – будь то СА+П или выдвинутые балки моста (аванбеки) при их поперечном обтекании.

Обсудим процесс спуска груза на парашюте. Изменением расстояния между СА и П можно менять величину силы сопротивления. При расстоянии L между ними, меньшем некоторого критического значения L^*, имеет место обтекание с «открытым следом» (нестационарное обтекание; рис. 3,*а*), а при $L > L^*$ – с «закрытым следом» (рис.3,*б*). Этим пользуются с целью уменьшения динамических нагрузок,

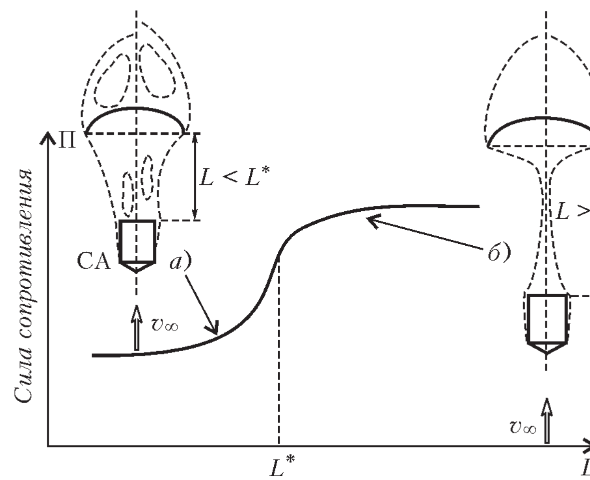


Рис.3. Изменение схемы обтекания системы двух тел при увеличении расстояния между ними

максимум которых приходится на момент раскрытия парашюта (рис. 4).

Резко тормозиться нельзя и по другой причине – спутный след может догнать быстро тормозящийся парашют и смять его. Поэтому применяют несколько парашютов – сначала

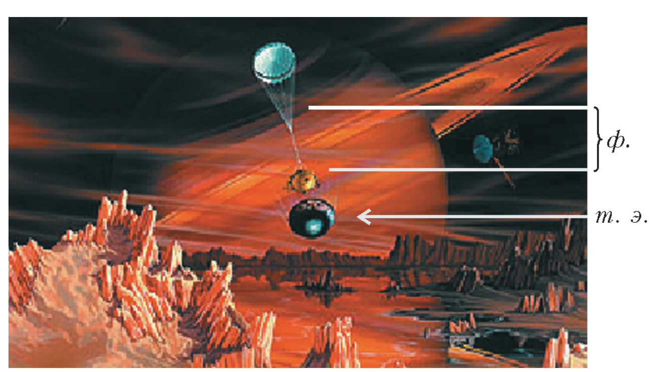


Рис.4. Изменение расстояния между спускаемым аппаратом и парашютом для управления величиной аэродинамического сопротивления (ф. – фал, который в момент раскрытия парашюта выбран, т.э. – тормозной экран, использованный на начальном этапе торможения)

маленький, а потом большой – или используют специальные ленты, которые стягивают «юбку» парашюта и по мере надобности разрываются, чтобы парашют постепенно распустился во всей своей прелести. Этот прием называется «рифовкой» парашюта – подобно тому, как на парусных судах во время штормового ветра «берут рифы» на парусах, или, по-простому, уменьшают их площадь, подвязывая специальными веревками.

А что же мост? Знание параметров его конструкции позволяет определить скорости ветра, при которых возможно возникновение аэроупругих колебаний балок, не связанных между собой плитами перекрытия. Возникновение таких колебаний очень опасно, так как может привести к разрушению строящегося моста. Но что такое аэроупругие колебания? Какова природа их возникновения?

Давно известно, что, перед тем как ступить на мост, подразделение солдат, идущих в ногу, получает команду «сбить шаг», чтобы избежать явления резонанса – совпадения собственных частот колебаний моста с частотой внешнего воздействия. Точно так же отрыв потока является тем внешним воздействием, которое при совпадении частот схода вихрей и собственных частот упругой конструкции моста может привести к его раскачке. Казалось бы, команду «сбить ногу» здесь уже не подашь. Однако не все так безнадежно.

Для борьбы с ветровым резонансом можно либо изменить конструкцию – например, еще на этапе проектирования изменив расстояние между балками, либо применить специальные системы демпфирования – например, аэродинамические системы. Если заставить вихри срываться с острых кромок нерегулярно, идти с разным шагом (не «в ногу»), то это и будет выполнение команды «сбить шаг» по-аэродинамически. На рисунке 1 видны такие гасители колебаний, имеющие вид петушиных гребней. Отрыв потока с острых кромок будет происходить по-прежнему, но масштаб вихрей и фазы схода по длине балки будут различными, так что возмущения потока, созданные предыдущей по потоку балкой, будут достигать другой балки для разных ее участков неодновременно.

Но связь мостов с парашютами оказывается еще теснее: есть парашютисты-экстремалы, которые прыгают с мостов. К сожалению, бывают неудачные прыжки, когда в результате воздействия отрывных ветровых структур, возникающих при обтекании элементов моста, происходит деформация купола парашюта, парашют «складывается», теряет свои тормозящие свойства, т.е. – увы! – становится хорошообтекаемым телом.

Критическое поведение

Э.РУМАНОВ

Для тех, кто не знает, – два слова про Ричарда Фейнмана (1918–1988). Американский физик, один из основателей квантовой электродинамики, Нобелевский лауреат, один из самых ярких теоретиков XX века. Студенты изучают физику по «Фейнмановским лекциям» (есть прекрасный русский перевод Г.И.Копылова) и находят там примерно такие слова:

Картина мира видится людям очень сложной. Многие не подозревают, что сложные процессы зачастую подчиняются простым уравнениям.

Проиллюстрируем это на конкретном примере. Нас будут интересовать качественные изменения в свойствах или поведении различных систем в критическом состоянии. Оказывается, закономерности таких изменений универсальны, в определенном отношении они не зависят от рассматриваемой системы. Впрочем, ограничимся рамками физики, химии и отчасти биологии, не затрагивая системы социальные, политические и т.п.

Впервые термин «критическая точка» появился в статьях о кипении. Посмотрим, что получится, если нагревать жидкость в запаянной ампуле. (Такой опыт требует специальной техники безопасности, без которой проводить его нельзя.) Перед нагревом жидкость занимает часть ампулы, остальной объем заполнен ее паром. Давление пара устанавливается таким, что температура кипения равна комнатной. При более высоком давлении пар будет конденсироваться, отдавая тепло окружающей среде, при более низком давлении жидкость будет испаряться, отнимая тепло у среды, пока равновесие не восстановится. В прозрачной ампуле поверхность жидкости отражает свет и хорошо видна. При нагреве открытого сосуда (например, чайника) его температура остается постоянной, пока вся вода не выкипит. В ампуле же температура и давление согласованно растут: температура всегда равна температуре кипения при данном давлении (рис.1). По мере нагрева плотность пара увеличивается, так как его в ампуле становится все больше, а плотность жидкости уменьшается из-за роста температуры (тепловое расширение). В критической точке $(p_к, T_к)$ обе плотности одинаковы, и отличить жидкость от пара невозможно. Около этой точки (т.е. при давлении и температуре чуть ниже $p_к$ и $T_к$) отличие есть, но оно мало, и случайные слабые воздействия (из-за беспорядочного броуновского движения) вызывают переходы от одного состояния вещества к другому. Ампула в этих условиях заполнена как бы смесью мелких капель жидкости и пузырьков пара. Такая среда сильно рассеивает свет (явление критической опалесценции). В некоторый момент нагрева ампула мутнеет, поверхность жидкости становится невидимой. Потом прозрачность восстанавливается, но никакой поверхности раздела уже нет – вещество в ампуле однородно. Про него нельзя сказать, жидкость это или пар.

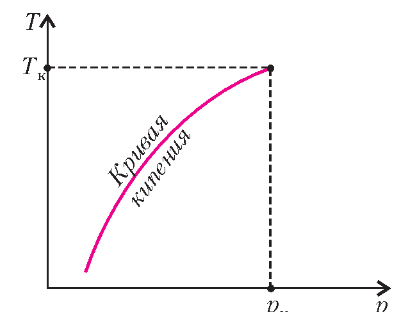


Рис. 1

Примеры качественных изменений при определенных (критических) значениях параметров встречаются повсюду. Скорость цепной реакции по достижении критической массы неудержимо нарастает, и происходит взрыв. Твердый материал разрушается, когда достигается его предел прочности. Если скорость потока жидкости или газа превысит определенную величину, в нем образуются вихри. И так далее. На первый взгляд, эти явления совершенно разнородны. Выяснилось, однако, что в критических условиях всегда наступает хаос. Эта универсальность критических явлений позволяет знакомиться с ними на самых простых примерах. А именно, обсудим критическое поведение, которое демонстрирует шарик на неровной поверхности.

Пусть шарик находится в ямке, как показано на рисунке 2. Если в начальный момент времени положить шарик на склон ямки, он будет кататься взад и вперед, пока, теряя энергию из-за трения, не остановится в нижней точке ямки – в точке *1*. При смещении шарика из этой точки вправо или влево сила, действующая на него, будет направлена так, чтобы вернуть его в эту точку. Такое равновесие называют устойчивым. Где бы ни был шарик в начальный момент, в конце концов он окажется в точке равновесия. (Для более сложных систем этот вывод не столь очевиден, но тоже справедлив.) Можно сказать, что шарик «забывает» свое прошлое. У каждой системы есть свое характерное время забывания.

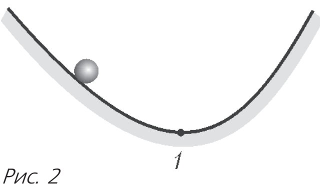


Рис. 2

Посмотрим на ямку с более пологими склонами (рис.3). Здесь шарик тоже останавливается в точке равновесия, но время забывания у него больше. Случайные толчки (если, например, ямка расположена на столике в вагоне поезда) легко выводят шарик из равновесия, после чего он не спешит туда возвращаться. В предельном случае шарика на горизонтальном столе говорят о безразличном равновесии. Если в начальный момент сообщить шарику некоторую скорость, точка, в которой он остановится, зависит от этой скорости и от его начального положения. Под действием случайных толчков шарик может посетить каждую точку стола с одинаковой вероятностью.

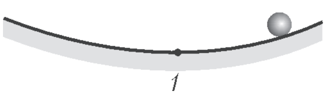


Рис. 3

Рассмотрим теперь более сложный рельеф (рис.4), где кроме ямки имеется еще горбик, вершину которого – точку *2* – математики называют точкой неустойчивого равновесия. При смещении шарика из этой точки появляется сила, стремящаяся такое смещение увеличить. Так как в реальности невозможно ни поместить шарик в точку *2* с математической точностью, ни избежать сколь угодно слабых толчков, то, с позиций экспериментатора, равновесия в этой точке нет. Значение точки *2* – в другом.

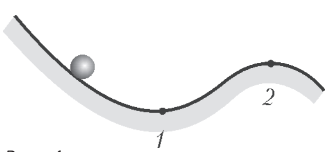


Рис. 4

Состояние движущегося шарика определяется двумя величинами – его положением x на рельефе в данный момент времени и скоростью v в этот момент. Два числа x и v можно считать координатами точки на плоскости. Ее называют фазовой плоскостью. В следующий момент времени будут уже другие значения x и v, движение «отображается» линией на фазовой плоскости – фазовой траекторией. Когда рельеф таков, как на рисунках 2 или 3, все траектории приходят в точку $x = x_1$, $v = 0$. Если же шарик на рисунке 4 перекатится через бугор, в точку *1* он может и не вернуться (это зависит от той части рельефа правее точки *2*, которая на рисунке не показана, и от начальной скорости шарика). Иными словами, траектории, сходящиеся к точке $(x_1, 0)$, занимают только часть фазовой плоскости. Эту часть называют бассейном притяжения точки x_1. Граница бассейна проходит через точку $x = x_2$, $v = 0$. По другую сторону границы расположены бассейны других точек равновесия. Фазовая плоскость поделена на бассейны притяжения подобно тому, как суша поделена водоразделами на бассейны различных водоемов.

Будем теперь спрямлять рельеф на рисунке 4 так, что ямка и горбик сглаживаются, а точки *1* и *2* сближаются. На рисунке 5 показан момент слияния этих точек. При меньшем изгибе равновесия нет, шарик катится вниз (рис.6). Таким образом, в критической ситуации, соответствующей рисунку 5, во-первых, исчезает граница бассейнов притяжения, или, точнее, левый бассейн поглощается правым, а во-вторых, при изгибе, близком к критическому, рельеф содержит почти горизонтальный участок. Движение шарика в этом случае подобно тому, что мы описывали, комментируя рисунок 3. Время забывания велико, а очень слабые случайные толчки (которые есть в любой реальной системе) вызывают «блуждания» большого размаха.

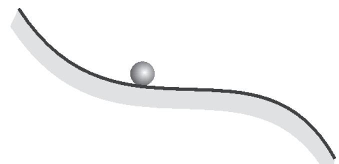


Рис. 5

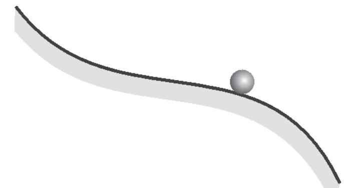


Рис. 6

Наконец, обратимся к рельефу на рисунке 7 – две ямки, разделенные горбом. Здесь при сглаживании горб исчезает, обе ямки сливаются в одну (рис.8), неустойчивая точка *2* в результате слияния с точками *1* и *3* становится устойчивой.

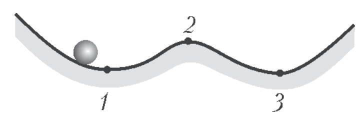


Рис. 7

Подчеркнем отличия превращений на рисунках 4–6 и на рисунках 7–8. В первом случае (слияние двух точек) равновесие исчезает, а новое положение равновесия оказывается отодвинутым от места слияния на конечное расстояние. Когда же сливаются три точки, новое равновесие возникает там, куда приходят старые точки в момент превращения. Но в обоих случаях имеют место почти горизонтальный участок рельефа, большое время забывания, хаотические колебания большого размаха под влиянием слабых случайных толчков.

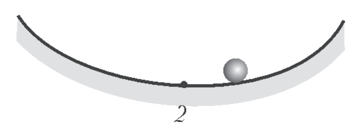


Рис. 8

При изучении критических явлений полезно понятие восприимчивости. Что такое восприимчивость применительно к шарику, можно пояснить, вернувшись к рисунку 2. Предположим, что к шарику с помощью нити, перекинутой через блок, привязан грузик (рис.9). Пусть масса грузика мала по сравнению с массой шарика. Под действием грузика шарик переберется из точки *1* в точку *1′* – это его новое положение равновесия. Отношение расстояния $\left|x_{1'} - x_1\right|$ к массе грузика и будет в данном случае восприимчивостью. Ясно, что на пологом рельефе (см. рис.3) восприимчивость больше, чем на крутом. То же относится к рельефам с почти горизонтальным участком на рисунках 5 и 8.

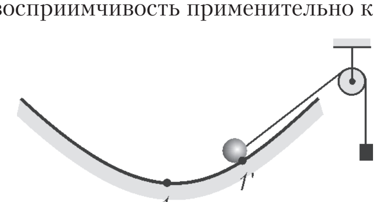


Рис. 9

Когда условия приближаются к критическим, восприимчивость любой системы (а не только шарика) растет. Отклик на каждое, даже слабое, воздействие велик. А так как среди воздействий всегда есть слабый шум, поведение системы в критических условиях оказывается хаотическим.

Для шарика критические условия связаны только с изменениями равновесия. Более интересны системы, которым внешнее воздействие не дает прийти в равновесие. Так, Земля не приходит в равновесие с межпланетной средой благодаря световому потоку от Солнца, а чтобы в камере холодильника поддерживалась температура ниже комнатной, надо включить его в сеть. Время забывания у таких (активных) систем, разумеется, тоже ограничено. Поэтому рано или поздно их поведение перестает зависеть от начальных условий. Система, как говорят, выходит на установившийся режим.

Есть разные сорта установившихся режимов. Выход на стационарный режим можно наблюдать, не расставаясь с шариком. Надо его бросить в сосуд с вязкой жидкостью (например, с глицерином). Скорость, с которой шарик опускается вниз, быстро выходит на постоянное значение, определяемое равенством силы тяжести шарика и суммы двух сил: выталкивающей (архимедовой) силы и силы вязкого трения. Из-за трения при движении шарика выделяется тепло, так что жидкость, окружающая шарик, нагревается, и ее вязкость падает. От этого установившаяся скорость увеличивается, тепла выделяется больше, вязкость становится еще меньше и так далее. Возникает, как говорят, обратная связь между скоростью и вязкостью. Такая связь служит причиной неустойчивости описанного режима при определенных условиях (значениях параметров). Для стального шарика в глицерине, например, критический радиус составляет примерно 1 см, а критическая скорость – около 1 м/с. Однако наблюдение этого явления в лабораторных условиях нереально. Тепловые процессы идут медленно, неустойчивость развивается за время порядка десятков минут, так что сосуд пришлось бы делать слишком глубоким. Иное дело, например, движение пластов земной коры. Возможно, некоторые землетрясения обусловлены тепловой неустойчивостью этого движения. Другой подозрительный в этом плане объект – ледник, ползущий вниз по склону горы.

Стационарный режим, как и состояние равновесия, тоже можно характеризовать восприимчивостью, которая в критической области параметров должна расти. Есть надежда, что изучение низкочастотного шума сложных промышленных и природных систем позволит найти признаки, предупреждающие заранее о назревающем кризисе. Трудно поверить, что сложные химические или биологические системы имеют что-либо общее с шариком, ямками и горбиками. Тем не менее, высокая восприимчивость и обусловленная ею хаотизация в критических условиях обнаружены у всех систем, исследованных до сих пор. Обратное утверждение о том, что высокую восприимчивость можно получить только в условиях, близких к критическим, не доказано, но, по-видимому, верно.

Нестационарные установившиеся режимы называют автоколебаниями. Многие холодильники работают в периодическом режиме: мотор включается, когда температура в камере превысит допустимое значение, и выключается после того, как она достаточно понизилась, затем следует стадия медленного нагрева из-за теплопроводности стенок, и все повторяется. Другой пример периодического режима – ход часов. В них источником «внешнего» воздействия, мешающего прийти в равновесие, служит батарейка или сжатая пружина.

До сих пор мы говорили о хаосе, который не выходит за пределы относительно узкой критической области параметров. Но есть режимы, которые после своего рождения остаются хаотическими, даже когда значения параметров уходят из критической области. Изучение такого хаоса показало, что и здесь важную роль играет соседство устойчивых и неустойчивых состояний. Именно хаос мешает делать достоверные предсказания, например правдивые прогнозы погоды. Хаос многолик, и особенно интересны различия между его проявлениями в разных случаях. Кое-что об этом уже удалось узнать, но главная работа – впереди.

Людмила, Черномор и шапка-невидимка

А.СТАСЕНКО

Везде всечасно замечали
Ее минутные следы:
То позлащенные плоды
На шумных ветвях исчезали,
То капли ключевой воды
На луг измятый упадали...
Сам карла утренней порою
Однажды видел из палат,
Как под невидимой рукою
Плескал и брызгал водопад.

А.С.Пушкин

Вспомнили? Ну конечно, речь идет о Людмиле, законной супруге Руслана, похищенной нехорошим Черномором. Это она приватизировала шапку-невидимку из черноморского гардероба. Однако действительно ли Людмила могла чувствовать себя столь комфортно, а Черномор был настолько бессилен увидеть «невидимую» пленницу?

В самом деле, невидимость тела означает, что оно ничего не отражает, не поглощает и не преломляет (см. по этому поводу, например, недавнюю статью В.Белонучкина «Как увидеть невидимку» в «Кванте» №4 за 2006 г.). Следовательно, хрусталик глаза, который должен фокусировать лучи на сетчатке, перестает «работать», а сетчатка, которая должна преобразовывать сфокусированную энергию в полезный сигнал, перестает что-либо поглощать.

Итак, абсолютно невидимая Людмила смогла бы перемещаться только ощупью, ориентируясь лишь на звуки или запахи (что может быть тоже сомнительным – но это лежит вне темы данной статьи).

А что же Черномор? Конечно, во времена князя Владимира (Красное Солнышко) и его дружинника Руслана, т.е. в X веке, не были еще сформулированы законы теплового

(Продолжение см. на с.34)

Морская вода даже при самом сильном холоде не замерзает до твердого и чистого льда.

Михаил Ломоносов

Я предположил, что во время кипения теплота поглощается водой и проникает в состав пара, образующегося из нее, тем же способом, как она поглощается льдом при таянии и проникает в состав образующейся воды.

Джозеф Блэк

Облако – туман в высоте.

Владимир Даль

Можно, как известно, расплавить посредством трения друг о друга в безвоздушном пространстве два куска льда; теперь делают попытки превратить воду в лед посредством неслыханно большого давления.

Юлиус Роберт Майер

...чтобы наблюдать насыщенный пар выше обыкновенной точки кипения воды, приходилось кипятить ее в замкнутых котлах, под искусственной атмосферой из сжатого воздуха и пара...

Александр Столетов

А так ли хорошо знакомы вам лед, вода и пар?

Еще как знакомы, ответят очень многие. Вода – это самое распространенное на Земле вещество. Все живое, в том числе и мы сами, в основном состоит из воды. Ее физические свойства изучены-переизучены, они даже используются в качестве эталонов.

Все это так, однако вода в своих различных агрегатных состояниях и по сей день преподносит множество сюрпризов. Особенности этого вроде бы простого вещества до конца еще не поняты, и поведение воды не всегда можно прогнозировать. Смириться с таким положением дел ученые, безусловно, не желают и упорно продолжают разбираться со все более тонкими деталями строения воды и ее участия в загадочных эффектах.

А стимулирует исследователей понимание исключительной важности воды для жизни на Земле. Ведь более полные знания о ней необходимы и для решения экологических проблем, и для создания новых лекарств и методов лечения, и для противостояния глобальным климатическим изменениям, и для совершенствования производственной деятельности человека...

Масштабы этих задач побуждают и нас обратиться к разговору о физических свойствах одной из четырех основных стихий. Посмотрите, ведь и среди школьных вопросов и задач найдется немало таких, которые заставят вас засомневаться в простоте этого простого вещества – воды.

Вопросы и задачи

1. Останется ли целой доверху заполненная водой закупоренная стеклянная бутылка, если ее опустить в тающий лед?

2. Ко дну сосуда с водой изнутри приморожен шарик изо льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, когда лед растает?

3. Можно ли расплавить олово в горячей воде? А заморозить воду расплавленным металлом?

4. Капельки тумана могут оставаться жидкими и при температуре -30 °С. Почему?

5. При первых морозах водоемы легче замерзают, если идет снег. Как это объяснить?

6. Какая физическая ошибка допущена в стихотворении о капле: «Она жила и по стеклу текла, но вдруг ее морозом оковало, и неподвижной льдинкой капля стала, а в мире поубавилось тепла»?

7. Почему превращение в воду плавающих в море льдов не приводит к наводнениям, тогда как растопление льда, покоящегося на острове Гренландия, вызвало бы катастрофический подъем уровня океана?

8. Удельная теплота плавления меди значительно меньше, чем у льда. Значит ли это, что для плавления медной пластинки в зимних условиях потребуется меньше энергии, чем для плавления льдинки той же массы?

9. Почему ожоги паром опаснее ожогов кипятком?

10. Что быстрее потушит пламя – кипяток или холодная вода?

11. В кастрюле с тяжелой крышкой вскипятили воду. Сняв кастрюлю с плиты, ей дали слегка остыть, затем в спокойную воду насыпали чайную заварку, и вода бурно закипела. Почему?

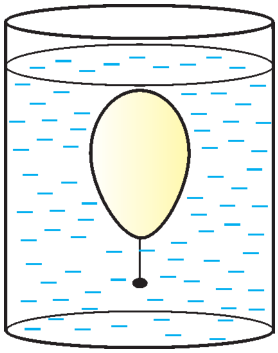
12. Желая ускорить процесс варки, хозяйка усилила огонь под кастрюлей, в которой кипела вода. Верно ли поступила хозяйка?

13. Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей воды, а другой – в ее толще?

14. Стакан с небольшим количеством воды поставили под колокол воздушного насоса и стали откачивать воздух. Почему вода сначала закипела, а потом замерзла?

15. Воду вскипятили в круглодонной колбе, колбу закупорили и перевернули. Если теперь на дно колбы положить немного снега или облить ее холодной водой, то вода в колбе закипит. Как это объяснить?

16. В каком случае «точка росы» становится «точкой инея»?



17. Иногда поверхности окон запотевают. Какие это поверхности — внешние или внутренние?

18. При критической температуре удельная теплота парообразования любой жидкости, в том числе и воды, равна нулю. Почему?

19. Какого цвета водяной пар?

Микроопыт

Выпустите из яйца его содержимое через маленькое отверстие в остром конце. Залепите дырочку воском или пластилином, к которому прикрепите на нитке грузик. Массу грузика надо подобрать так, чтобы он удерживал скорлупу почти у дна высокой банки с водой комнатной температуры.

Если вынести банку на мороз, то через некоторое время ваш «прибор» всплывет, но вскоре опустится. Если теперь внести банку в комнату, то скорлупа вновь проделает свой путь вверх-вниз. Объясните это.

Любопытно, что...

...расширение воды при замерзании и ее закипание при пониженном давлении были открыты лишь в семнадцатом столетии искусным английским экспериментатором Робертом Бойлем.

...из морской воды образуется исключительно прочный полярный лед. Иная точка зрения, разделявшаяся, судя по эпиграфу, Ломоносовым, «не позволила» пробиться к Северному полюсу ни одной из экспедиций XVII—XIX веков, так как парусники всякий раз застревали в мощных льдах.

...способ приготовления мороженого поначалу охраняли как большой секрет. Напрасно опытные повара при многих европейских дворах пытались заморозить смесь из взбитых сливок и фруктовых соков, пользуясь льдом в обычных погребах. Оказывается, дело было в добавлении соли — перемешивая ее с колотым льдом, можно было значительно понизить температуру, вплоть до полного замерзания смеси.

...одна из особенностей льда заключается в том, что температура его плавления, в отличие от большинства веществ, понижается с увеличением давления. Однако этот эффект не отвечает за появление водяной смазки под лезвием коньков, чем долгие годы пытались объяснить их легкое скольжение по льду.

...знаменитый сказочник Андерсен упомянул в «Снежной королеве» десятиконечные снежинки, хотя много раньше астроном Кеплер установил их шестиконечную форму. Правда, Декарту удалось наблюдать крайне редкие двенадцати- и восемнадцатиконечные кристаллики снежинок.

...недавно была обнаружена пятая форма плотного аморфного льда, образующегося под действием высокого давления при температуре около −200 °С. Заметим, что все виды льдов, кроме обычного, тонут в воде. Иначе говоря, лед, получающийся при нормальных условиях, ведет себя аномально.

...в годы второй мировой войны для восстановления потерь флота английские ученые предложили морскому ведомству построить непотопляемые авианосцы изо... льда. Для этого предполагалось использовать айсберги, за которыми в Арктику была даже направлена специальная экспедиция. Проект, правда, так и не был осуществлен, однако внимание к разного рода ледяным сооружениям неизмеримо возросло.

...большая теплоемкость воды объясняется тем, что ее молекулы объединяются в так называемые кластеры, (супермолекулы) и при поступлении к воде тепла заметная его часть тратится на разрыв связей между входящими в состав кластера соседками-молекулами.

...на Марсе жидкой воды нет, так как при марсианском атмосферном давлении, в 160 раз меньшим, чем на Земле, вода может существовать лишь в твердом и газообразном состояниях. А на Венере вода в жидкой фазе не могла бы находиться потому, что температура поверхности этой планеты около 480 °С, что заметно выше критической температуры воды. Правда, исследователи не потеряли надежды обнаружить замерзшую воду на Луне, где она могла бы сохраниться на дне глубоких полярных кратеров.

...как известно, в скороварке пищу можно приготовить гораздо быстрее, чем в обычной кастрюле. Однако открывать эту посуду следует очень осторожно: после разгерметизации давление падает, и жидкость оказывается заметно перегретой, что приводит к взрывному вскипанию во всем объеме кастрюли, выплескиванию горячей воды и... ожогам.

...английский физик Чарльз Вильсон, предложивший в 1912 году применяемый и поныне способ регистрации заряженных частиц с помощью камеры, заполненной пересыщенным паром, до этого занимался исследованием происхождения дождей и туманов.

...феномен «памяти воды», т.е. ее способность длительное время хранить информацию, так активно обсуждался в последние годы, что заставил ученых провести специальные эксперименты. Увы, результат отрицателен: вода обладает нестабильной, постоянно меняющейся структурой и, скорее, является одним из самых «забывчивых» веществ на свете.

Что читать в «Кванте» о льде, воде и паре

(публикации последних лет)

1. «Наглядный способ регистрации заряженных частиц» — 2001, №6, с.11;
2. «Водяные пары» — 2002, №2, 26;
3. «Тепловые свойства воды» — 2002, №3, с.10;
4. «Снежинки и ледяные узоры на стекле» — 2002, №5, с.29;
5. «О структуре льда» — 2002, Приложение №6, с.19;
6. «О физике на приусадебном участке» — 2003, №1, с.27;
7. «Вода внутри нас» — 2003, №2, с.2;
8. «Насыщенные и ненасыщенные водяные пары» — 2004, №2, с.23;
9. «Костры в поле и русская баня» — 2004, Приложение №4, с.60;
10. «Калейдоскоп «Кванта» — 2005, №3, с.32;
11. «Метастабильные капли и обледенение самолета» — 2005, №4, с.8;
12. «Задачи с жидкостями» — 2006, №1, с.40.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

излучения (хотя люди не могли не чувствовать тепла, идущего от костра). Не было и тепловизоров, которые в наше время различают участки тела с разностью температур в доли градуса. Но ведь и Черномор был не прост: «Он звезды сводит с небосклона, Он свистнет – задрожит луна...» При таких энергетических возможностях не знать законов термодинамики и равновесного электромагнитного излучения нагретых тел – совсем неприлично для колдуна.

Нормальные люди, конечно, были тогда еще менее изощренными. Только в 1879 году Йозеф Стефан из экспериментальных наблюдений установил, что полный поток энергии, излучаемой нагретым телом, пропорционален четвертой степени его температуры. Через пять лет этот факт был подтвержден теоретически (из термодинамических соображений) Людвигом Больцманом. Это важное соотношение теперь называется законом Стефана–Больцмана и формулируется так: плотность потока энергии тела, нагретого до температуры T, равна

$$q = \sigma T^4 ,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт$/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)$ – постоянная, носящая имена этих ученых.

Постоянная Стефана–Больцмана является довольно красивой комбинацией «еще более фундаментальных констант» –

$$\sigma = 12\pi \frac{k^4}{c^2 h^3}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right),$$

каждая из которых венчает важнейший раздел физики:

скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – это специальная теория относительности,

постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – квантовая механика,

постоянная Больцмана $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – статистическая физика

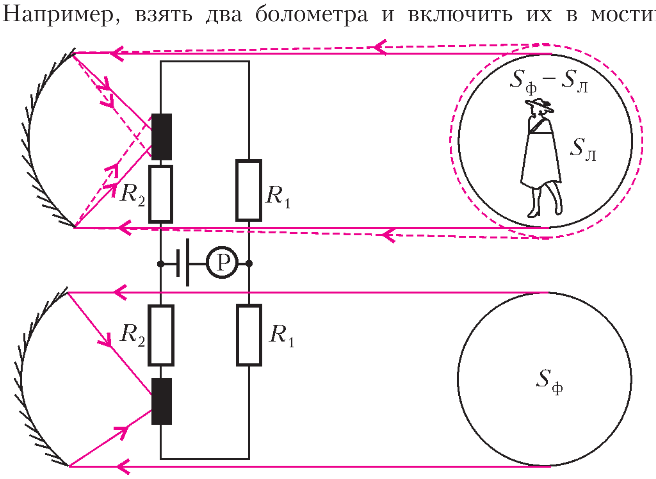
(не хватало еще постоянной тяготения!).

А еще присутствуют вездесущее число π и бесконечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Советуем самостоятельно вычислить σ – вы получите большое удовольствие, находясь в окружении знаменитых имен.

Итак, все тела (звезды, деревья, стены, учителя и даже школьники) излучают электромагнитные волны. Часть волн, которая относится к инфракрасному излучению, т.е. невидимому диапазону спектра излучения молекул, атомов и ядер, получила название теплового излучения.

Что мог бы при своем могуществе сделать Черномор? Например, взять два болометра и включить их в мостик Уитстона (см. рисунок). Болометр (от греч. «луч» и «измеряю») – это приемник излучения всех длин волн, которые, падая на него, изменяют его электрическое сопротивление. В результате с помощью болометра можно измерять мощность излучения.



Затем Черномор мог бы сфокусировать на каждый из них излучение, отраженное двумя одинаковыми параболическими зеркалами. Посмотрим, что из этого может получиться.

Если в «поле зрения» обоих зеркал попадает только фоновое излучение, то регистрирующий прибор Р покажет ноль. Если же в поле зрения одного из зеркал окажется объект площадью сечения $S_Л$, то излучение фона будет приходить уже от площади $S_ф - S_Л$. Тогда возникнет разность мощностей, регистрируемых болометрами:

$$\left(\left(S_ф - S_Л\right)q_ф + S_Л \sigma T_Л^4 - S_ф q_ф\right)\Delta\Omega ,$$

положив которую равной наименьшей регистрируемой мощности $W_{\min}$, получим

$$W_{\min} = S_Л\left(\sigma T_Л^4 - q_ф\right)\Delta\Omega .$$

Здесь $q_ф \sim \sigma T_ф^4$ – плотность потока фонового излучения, $\Delta\Omega \sim \frac{D^2}{x_{\max}^2}$ – телесный угол, под которым видна площадь зеркала от излучающего его объекта, где D – диаметр зеркала, $x_{\max}$ – максимальное расстояние между зеркалом и объектом. Тут и участок фона и Людмила рассматриваются как удаленные излучающие объекты, расположенные в одной плоскости. Таким образом,

$$x_{\max} \sim D\sqrt{\frac{\sigma S_Л \left|T_Л^4 - T_ф^4\right|}{W_{\min}}} .$$

Знак модуля означает, что объект может быть как теплее, так и холоднее фона.

Теперь сделаем численные оценки. Пусть диаметр зеркала D = 0,1 м (вполне портативный прибор), температура окружающей среды, т.е. «фона», $T_ф = 21\ ^\circ\text{C} = 294$ К (вполне комфортная температура, как и должно быть в садах волшебника), температура тела объекта – Людмилы в легкой одежде – $T_Л = 36\ ^\circ\text{C} = 309$ К, площадь силуэта Людмилы $S_Л = 0{,}5$ м^2, а наименьшая мощность, регистрируемая прибором, $W_{\min} = 1$ мкВт. Подставляя все это в приведенное выше выражение, получим

$$x_{\max} \sim 0{,}1\sqrt{\frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5\left(309^4 - 294^4\right)}{10^{-6}}}\ \text{м} \approx 700\ \text{м} .$$

Эта оценка показывает, что Черномор вполне мог бы зарегистрировать присутствие теплой Людмилы на менее теплом фоне в пределах своего очень немалого аквапарка.

Отсюда видно, что даже волшебникам полезно знать законы физики, а уж достать дефицитный прибор – для них самое простое дело.

Примечание. Приведенные выше оценки сделаны в предположении, что размеры болометра малы, а отражающие параболические зеркала собирают параллельные лучи строго в одну точку. На самом деле, болометры имеют какие-то конечные размеры, а на краях отражателей происходит дифракция, так что «поле зрения» каждого зеркала увеличивается (пунктир на рисунке). Эти факторы приведут к уменьшению $x_{\max}$. Помимо конечного размера болометра, на размер поля зрения должно влиять и такое явление, как дифракция падающего излучения на краях входного зрачка, т.е. зеркала. Однако, чтобы не усложнять наши рассуждения, ограничимся сказанным, считая, что мы делаем, как говорят математики, оценку сверху.

МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Б.ФРЕНКИН

На математических олимпиадах в течение многих лет регулярно предлагаются задачи о круговых турнирах, т.е. соревнованиях n участников, каждый из которых встречается с каждым (как правило, один раз). Результатом каждой встречи является либо победа одного игрока и поражение другого, либо ничья. В некоторых задачах рассматриваются турниры без ничьих.

Отметим, что помимо эстетической привлекательности задачи о турнирах имеют и прикладное значение. Дело в том, что если вначале математические методы применялись в основном только в физике и технике, то с середины двадцатого века началось широкое использование математики в медицине и гуманитарных науках. При этом выяснилось, что часто приходится иметь дело с данными качественного характера, которые не могут быть описаны с помощью количественных переменных и функциональных зависимостей между ними.

Существенную часть таких данных составляют так называемые экспертные оценки. Психологические исследования показывают, что человек не может давать надежные ответы на вопросы количественного типа, поэтому экспертам задают качественные вопросы типа: «Какой из данных объектов в наибольшей степени обладает таким-то свойством?» Исторически одним из первых экспертных методов стал *метод парных сравнений,* в котором эксперту предъявляются все пары объектов из данной совокупности и эксперт отвечает, какой из двух объектов предпочтительнее. Очевидно, что ответы эксперта можно записать в виде турнирной таблицы, причем, в зависимости от того, разрешено эксперту объявлять объекты равноценными или нет, получится турнир с ничьими или без ничьих. Соответственно, возникающие при этом задачи можно формулировать на языке турниров.

Популярность турнирной тематики стала одной из причин, побудившей нас совместно с С.Токаревым и А.Толпыго представить на XVII Летней конференции Турнира городов серию задач о турнирах.

Эти задачи решались весьма активно, поэтому имеет смысл рассказать о таких и родственных им задачах в отдельной статье.

Распределения результатов

В дальнейшем мы будем считать, что за победу в партии игрок получает 1 очко, за ничью – $1/2$ очка, за поражение – 0 очков.[1] Число очков, набранное i-м участником во всех встречах, будем обозначать s_i. Прежде всего выясним, каким условиям должен удовлетворять набор чисел s_i.

[1] *В современных футбольных турнирах за победу дается 3 очка, а за ничью – 1, но с этой системой пока не связано никаких интересных математических фактов.*

Задача 1. *а) Докажите, что числа* $s_1 \le \ldots \le s_n$ *удовлетворяют условиям*

$$s_1 + \ldots + s_n = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$s_1 + \ldots + s_k \ge \frac{k(k-1)}{2}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \qquad (1)$$

б) Даны n целых неотрицательных чисел $s_1 \le \ldots \le s_n$, удовлетворяющих условиям (1). Докажите, что существует турнир без ничьих, в котором участники набирают $s_1, \ldots, s_n$ очков.

в) Даны n полуцелых неотрицательных чисел $s_1 \le \ldots \le s_n$, удовлетворяющих условиям (1). Докажите, что существует турнир с ничьими, в котором участники набирают $s_1, \ldots, s_n$ очков.

Решение. а) Так как любые k участников проводят между собой $\frac{k(k-1)}{2}$ встреч и в каждой встрече ее участники в сумме получают одно очко, сумма очков любых k участников не меньше $\frac{k(k-1)}{2}$. При $k = n$ это неравенство, очевидно, обращается в равенство.

б) Для любого допустимого набора $s_1, \ldots, s_n$ рассмотрим все разности

$$s_1 + \ldots + s_k - \frac{k(k-1)}{2}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Упорядочим наборы по максимальной из этих разностей, а если максимальные разности равны, то – по количеству разностей, равных максимальной. Существование искомого турнира докажем индукцией по полученному порядку.

Если для всех k

$$s_1 + \ldots + s_k = \frac{k(k-1)}{2},$$

то

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad \ldots, \quad s_n = n-1$$

и турнир строится очевидным образом. Пусть

$$s_1 + \ldots + s_k - \frac{k(k-1)}{2} = l > 0$$

– максимальная из разностей. Тогда $s_1, \ldots, s_k - 1, s_{k+1} + 1, \ldots, s_n$ – допустимый набор, предшествующий данному, и по предположению индукции существует турнир с таким распределением очков. Если в этом турнире $(k+1)$-й участник победил k-го, то изменим результат их встречи на противоположный, если же победил k-й участник, то, поскольку $s_{k+1} + 1 > s_k - 1$, то найдется участник, выигравший у k-го, но проигравший $(k+1)$-му. Поменяв результаты этих встреч, получим турнир с нужным распределением очков.

в) Аналогично пункту б), проводится индукция по числу m полуцелых s_i. Отметим, что таким образом доказывается более сильное утверждение: существует турнир с данным распределением очков и числом ничьих $m/2$.

Утверждение пункта в) можно усилить: для любого набора полуцелых чисел s_i, удовлетворяющих условиям (1), существует турнир со следующим свойством для любых трех участников A, B, C: если A выиграл у B, а B у C, то A выиграл у C. Такие турниры будем называть *полутранзитивными.*

Задача 2. *Докажите, что для любого турнира с ничьими существует полутранзитивный турнир, в котором все участники набрали такое же число очков.*

Указание к решению. Среди всех турниров с данным распределением очков рассмотрите турнир с наибольшим числом ничьих.

Задача 3. *а) Докажите, что если в круговом турнире все N участников, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.*

б) Докажите, что если любые два игрока набрали разное количество очков и при этом нет ничьих, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех, кроме первого, и т.д.

Решение. а) Пусть «нестандартный» участник набрал больше очков, чем «стандартные». Результат «среднеарифметического» участника составляет $(N-1)/2$. Недобор «стандартного» участника до этого количества не может быть меньше $1/2$, поэтому «стандартные» вместе не добрали не менее чем $(N-1)/2$ очков. «Нестандартный» должен на столько же превысить средний уровень, т.е. он получил не меньше $N-1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда «нестандартный» у всех выиграл. Аналогично разбирается случай, когда «нестандартный» набрал меньше, чем «стандартные».

б) Если на турнире не было ничьих, то число очков каждого участника – целое, в промежутке от 0 до $N-1$. Если все они различны, то это все целые числа от 0 до $N-1$. Очевидно, игрок с $N-1$ очками выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $N-2$ очками выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

Задача 4. *а) N спортсменов провели круговой турнир. Через год те же спортсмены встретились снова. Докажите, что найдется участник, сумма очков которого изменилась не больше чем на* $[N/2]$, *где квадратные скобки обозначают целую часть числа.*

б) Приведите пример, когда оценка $[N/2]$ *достигается.*

в) N спортсменов, где N четно, дважды провели круговой турнир. Сумма очков каждого изменилась не менее чем на $N/2$. *Докажите, что она у всех изменилась ровно на* $N/2$.

Решение. а) Для краткости положим $M=[N/2]$. Пусть в турнире X таких участников, каждый из которых увеличил свое количество очков более чем на M. Прирост их суммы очков обозначим D. Пусть $X>0$. Тогда $D>XM$. Сумма очков в поединках между данными участниками всегда одна и та же. Прирост достигается в матчах с другими участниками. Максимален он в том случае, если в первом турнире данные X спортсменов всем проиграли, а во втором турнире у всех выиграли. Тогда $D=X(N-X)$. Значит, $XM<X(N-X)$, откуда $[N/2]<N-X$. Так как X целое, то отсюда следует, что $X<N/2$. При $X=0$ это неравенство также выполняется.

Пусть теперь Y – число таких участников, каждый из которых уменьшил свое количество очков более чем на M. Аналогично предыдущему, $Y<N/2$.

Сложив последние два неравенства, получаем искомый результат.

б) Пусть 1-й участник выиграл у всех, 2-й – у всех, кроме первого, и т.д. (i-й участник набрал $N-i$ очков). Далее, пусть таблица второго турнира имеет аналогичный вид, но участники сдвинулись по кругу на M (где снова $M=[N/2]$): 1-й занял $(M+1)$-е место, 2-й – $(M+2)$-е место, … …, $(N-M)$-й – последнее место, $(N-M+1)$-й – первое место, …, N-й – M-е место. Тогда те, кто в первом турнире занял первые $N-M$ мест, ухудшили свой результат на M очков, а остальные улучшили его на $N-M$. Но всегда $N-M\ge M$, поэтому минимальное изменение равно M.

в) Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков не менее чем на $N/2$, и на тех, кто ее, соответственно, уменьшил. Хотя бы одна из этих групп включает не менее $N/2$ спортсменов. Пусть, например, такова первая группа, и в ней X спортсменов. Если D – прирост их суммы очков, то $D\ge XN/2$. Эта сумма увеличилась за счет матчей с остальными $N-X$ участниками, поэтому $D\le X(N-X)$. Отсюда $N-X\ge N/2$. Но по предположению $X\ge N/2$. Значит, $X=N/2$, и оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств означает, что все спортсмены первой группы увеличили свою сумму очков ровно на $N/2$. Как следует из доказанного, вторая группа состоит из $N-X=N/2$ участников, поэтому к ней применимо такое же рассуждение.

Транзитивные и правильные турниры

Определение 1. *Циклом длины k* назовем набор из k участников, таких, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й – у 3-го, … …, $(k-1)$-й – у k-го, k-й – у 1-го. Число циклов в турнире обозначим NT.

Понятие цикла особенно важно для анализа парных сравнений. Действительно, если эксперт предпочитает 1-й объект 2-му, 2-й – 3-му, …, $(n-1)$-й – n-му, то естественно ожидать, что 1-й объект для него предпочтительнее n-го. Поэтому наличие циклов свидетельствует о противоречиях оценок эксперта. Чем больше таких противоречий, тем больше сомнений вызывает компетентность данного эксперта. В связи с этим возникает задача количественного измерения противоречивости. Следующее утверждение показывает, что в турнирах без ничьих мерой противоречивости может служить число циклов длины 3.

Задача 5. *Докажите, что если в турнире без ничьих есть цикл длины k, то есть по крайней мере k – 2 цикла длины 3.*

Указание к решению. Воспользуйтесь методом математической индукции.

При больших n перебор всех троек игроков является слишком трудоемким. Поэтому желательно иметь более простой способ нахождения числа циклов. Оказывается, что оно выражается через числа s_i:

$$NT=\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{\sum_{i=1}^{n}s_i^2}{2}. \qquad (2)$$

Если вид формулы (2) дан, то доказать ее довольно просто: надо убедиться, что при замене результата одной встречи на противоположный правая и левая части (2) меняются одинаково.[2] Гораздо труднее понять, как эта формула может быть выведена. На конференции Турнира городов тайваньская команда нашла следующее красивое решение этой задачи:

Так как трех из n участников турнира можно выбрать $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ способами, число нециклических троек равно C_n^3-NT. Посчитаем теперь количество таких троек A, B, C, что A выиграл у B, а B у C. Так как каждая циклическая тройка дает три такие цепочки, а нециклическая одну, общее число цепочек равно C_n^3+2NT. С другой стороны, если игрок B набрал s_i очков, то выигравшего у него игрока A можно выбрать $n-1-s_i$ способами, а проигравшего игрока $C-s_i$ способами. Следовательно, число цепочек, в которых B является средним игроком, равно $s_i(n-1-s_i)$, а общее число цепочек равно $\sum_i s_i(n-1-s_i)$.

Приравняв два полученных выражения и использовав, что $\sum s_i=n(n-1)/2$, получим формулу (2).

[2] *Подробнее об этом можно прочесть в статье А.Заславского «О логичных и нелогичных турнирах» в «Кванте» №5 за 1997 год.*

Для турниров с ничьими проблема измерения противоречивости резко осложняется. Прежде всего это связано с тем, что необходимо считать тройки не одного, а трех типов.

Определение 2. В турнире с ничьими назовем тройку участников *нетранзитивной*, если результаты их встреч между собой задаются одной из трех следующих таблиц:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Суммарной нетранзитивностью турнира естественно считать величину $NT = a + bx + cy$, где a, b, c – число троек, соответственно, первого, второго и третьего видов, x, y – некоторые коэффициенты. Понятно, что для вычисления NT недостаточно знать количество очков s_i, но, возможно, его удастся выразить через числа v_i, n_i, p_i выигрышей, ничьих и проигрышей каждого участника. Таким образом, необходимо найти ответ на два вопроса:

а) Существуют ли веса x, y, при которых NT выражается через v_i, n_i, p_i?

б) Какова формула для NT при этих значениях x, y?

Метод, примененный для турниров без ничьих, позволяет ответить сразу на оба вопроса. Однако он требует довольно громоздких вычислений, поэтому приведем только ответ: $x = 1/2$, $y = 1/6$ и

$$NT = \frac{\left(n^3 - n\right) - \sum n_i\left(n_i + 2\right) - 3\sum\left(v_i - p_i\right)^2}{24}. \qquad (3)$$

Разумеется, если все $n_i = 0$, то (3) переходит в (2).

Задача 6. *Найдите максимально возможное значение NT.*

Ответ. $\left(n^3 - n\right)/24$ при нечетных n, $\left(n^3 - 4n\right)/24$ при четных.

Задача 7. *Верно ли, что все полутранзитивные турниры с одинаковыми s_i имеют одно и то же количество*

а) ничьих;

б) нетранзитивных троек?

Ответ. Нет. Например, можно рассмотреть следующие два турнира:

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Практическая ценность формулы (3) оказывается сомнительной из-за невозможности дать содержательную интерпретацию коэффициенту $y = 1/6$. Впрочем, требование отсутствия троек третьего вида вообще кажется слишком жестким. Действительно, представим себе, что у нас есть n предметов различной массы и чашечные весы с некоторым порогом чувствительности, т.е. их чашки остаются в равновесии, если массы положенных на них предметов отличаются меньше чем на критическое значение ε. Тогда, если взвесить каждую пару предметов и занести результаты взвешиваний в турнирную таблицу, то в ней вполне могут оказаться тройки третьего вида (если разности весов первого и второго, а также второго и третьего предметов меньше порога, но разность весов первого и третьего больше). С другой стороны, очевидно, что полученный турнир обладает следующим свойством: если A выиграл у B, то A выиграл у всех игроков, набравших не больше очков, чем B, а B проиграл всем игрокам, набравшим не меньше очков, чем A. Назовем такой турнир *правильным.*

Задача 8. *а) Докажите, что правильный турнир является полутранзитивным.*

б) Докажите, что полутранзитивный турнир не является правильным тогда и только тогда, когда найдутся четыре игрока, результаты встреч которых друг с другом задаются одной из следующих таблиц:

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

в) Приведите пример распределения очков, для которого не существует правильного турнира.

г) Найдите условия на количества очков, при которых правильный турнир существует.

Таким образом, турнир является правильным тогда и только тогда, когда он не содержит нетранзитивных троек первого и второго вида и четверок из пункта б) задачи 8. В качестве отклонения от правильности можно взять какую-нибудь функцию от количества таких троек и четверок. Но существует ли такая легко вычисляемая функция, нам неизвестно.

Задача 9. *Для турнира с данными s_i найдите:*

а) максимально возможное число ничьих;

б) минимально возможное число нетранзитивных троек.

Ответы на оба вопроса неизвестены.

Неправильные партии и странные игроки

В предыдущем разделе мерой противоречивости турнира считались циклы. Здесь мы рассмотрим ряд других показателей, которые можно использовать для той же цели.

Задача 10. *Будем называть встречу двух игроков неправильной, если выигравший ее набрал в итоге меньше очков, чем проигравший. Какую долю от общего числа встреч могут составлять неправильные?*

Эта задача (автор – С.Токарев) предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2000 году. Интуитивно кажется очевидным, что неправильные партии должны составлять менее половины общего количества. Но это неверно! Доля неправильных партий может превышать любое число, меньшее $3/4$.

Решение. Докажем сначала, что доля неправильных встреч всегда меньше $3/4$. Пусть n – число игроков, $m = [n/2]$. Игроков, занявших первые m мест, назовем сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть x – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $m(m-1)/2$, а во встречах со слабыми она не больше x. Поэтому средний результат сильного не больше $(m-1)/2 + x/m$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(n-m-1)/2 + \left(m(n-m) - x\right)/(n-m) = (n+m-1)/2 - x/(n-m)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $x > m(n-m)/2 \geq \left(n^2 - 1\right)/8$. Так как общее число партий равно $n(n-1)/2$, то доля правильных партий больше $(n+1)/(4n) > 1/4$.

Теперь докажем, что доля неправильных партий может быть сколь угодно близка к $3/4$. Возьмем сначала турнир из $2k+1$ игроков, в котором каждый участник с номером $i \leq k$

проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i>k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Теперь «размножим» каждого участника, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а игроки из одного блока играют вничью. Занумеруем игроков в каждом блоке числами от 1 до k. Будем менять результаты участников из блока $k+1$ во встречах с блоком $k+1-i$ ($i=1, \ldots, k$). Пусть j-й игрок блока $k+1$ при $j \le k-i$ играет вничью с игроками $j+1, \ldots, j+i$ и выигрывает у остальных игроков блока $k+1-i$, а при $j>k-i$ выигрывает у игроков $j-k+i, \ldots, j-1$ и делает ничью с остальными. В партиях блока $k+1$ с блоком $k+1+i$ заменим ничьими ik проигрышей по аналогичной схеме. Теперь сумма очков одинакова внутри каждого блока и убывает при росте номера блока. Число неправильных партий составляет $\frac{3}{2}k^4-\frac{k^3}{2}-k^2$. Поскольку общее число партий равно $k(2k+1)\left(k(2k+1)-1\right)/2$, то при больших k доля неправильных партий будет сколь угодно близка к $3/4$.

Определение 3. Назовем участника турнира *странным*, если он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, странный игрок мог сыграть как угодно.

Подробно о странных игроках можно прочесть в статье Б.Френкина «Странные игроки» в «Кванте» № 6 за 1999 год. Поэтому здесь мы просто приведем перечень основных фактов.

Задача 11. *Тридцать три богатыря провели турнир без ничьих. Один странный богатырь победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Наравне со странным не набрал очков никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.*

Решение. Предположим, что странный занял место выше тринадцатого. Тогда количество тех, кто набрал меньше очков, чем он, превышает двадцать. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый из них провел не менее 20 таких поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее 10 очков. Кроме того, он выиграл у странного – значит, всего набрал не менее 11 очков. Странный набрал больше его – значит, не менее 12 очков. Но странный выиграл только у тех, кто занял более высокое место на турнире – следовательно, их не менее 12, и странный занял место не выше тринадцатого.

Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, и по доказанному странный богатырь занял место не выше тринадцатого. Снова поменяем результаты на противоположные. Последовательность мест изменится на обратную. Заметим теперь, что при 33 участниках двадцать первое место – это тринадцатое с конца.

Задача 12. *Докажите, что все странные участники имеют одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть A и $Б$ – странные, причем A набрал больше очков, чем $Б$. Тогда A проиграл $Б$. Очевидно, A сыграл с каким-то третьим игроком (и не с одним) лучше, чем с ним сыграл $Б$. Но если такой игрок $В$ набрал меньше очков, чем A, то $В$ выиграл у A (по определению странного игрока). Если же $В$ набрал не меньше очков, чем A, то $В$ набрал больше, чем $Б$, и тогда $Б$ (как странный) выиграл у $В$. Значит, A ни с кем не сыграл лучше, чем $Б$, в противоречии с предыдущим.

Определение 4. Если игрок получил столько же очков, сколько странный, но сам не является странным, то назовем его *средним.* Тех, кто набрал больше, будем называть *сильными,* а тех, кто набрал меньше, – *слабыми.*

Задача 13. *Может ли странный игрок разделить первое место? А последнее?*

Решение. Пусть в турнире шесть участников. Первые трое сыграли между собой вничью, четвертый с пятым – также вничью, причем оба проиграли первым троим, а шестой выиграл у первых трех и проиграл четвертому и пятому. Тогда шестой разделил первое место с первыми тремя игроками и при этом является странным.

Чтобы поместить странного игрока на последнее место, поменяем все результаты на противоположные.

Задача 14. *Могут ли на первом или последнем месте находиться только странные?*

Решение. Пусть первое место полностью принадлежит странным и их число равно M. Любой из них проиграл всем, кто не делит первое место, и поэтому набрал не более $M-1$ очков. Игрок, не находящийся на первом месте, выиграл у всех странных и потому получил результат не меньше M, что противоречит предыдущему. Значит, первое место не может принадлежать только странным.

Для последнего места рассуждение аналогичное.

Задача 15. *Известны результаты всех игроков. Известно также, что на турнире были странные участники. Сколько очков они набрали?*

Решение. Странный игрок набирает очки только во встречах с теми, кто получил не меньше очков. Поэтому он обладает следующим свойством:

Количество очков, полученное странным игроком, меньше числа игроков, набравших столько же или больше (включая его самого).

Пусть игрок A набрал больше очков, чем странный (который по определению выиграл у всех, кто набрал больше его). Тогда сумма очков игрока A заведомо больше, чем число игроков, имеющих столько или больше, чем он. Как следствие, A не обладает указанным свойством. Ответ на поставленный вопрос теперь ясен: количество очков странного участника – это наибольшее количество очков, которое меньше числа игроков, набравших столько или больше.

Отметим, что мы заново доказали, что все странные имеют одинаковую сумму очков,

Задача 16. *Докажите, что число странных всегда не больше $[N/2]-1$.*

Решение. Все странные игроки делят одно и то же место в турнирной таблице. Пусть это место не является первым. Тогда участник, находящийся на первом месте, проиграл всем странным. Но он проиграл меньше встреч, чем выиграл. Значит, число проигранных им матчей меньше $N/2-1$ и (как целое) не больше $[N/2]-1$, что и требуется. Если же странные участники делят первое место, то аналогичное рассуждение можно применить к последнему месту.

Задача 17. *Для произвольного $N \ge 4$ и произвольного натурального $K \le [N/2]-1$ постройте пример, когда число странных равно K.*

Решение. Пусть $M=[N/2]$, $1 \le L \le M-1$, игроки занумерованы от 1 до N и разделены на 4 группы. В первую группу включим участников с номерами от 1 до L, во вторую – от $L+1$ до M, в третью – от $M+1$ до $N-L$ и в четвертую – остальных. Пусть при этом игроки первой группы проиграли все матчи со второй группой и выиграли матчи с третьей и четвертой. Четвертая группа выиграла у второй и проиграла первой и третьей. Все остальные встречи закончились вничью. Нетрудно подсчитать, что игроки первой группы набрали по $N-M+(L-1)/2$ очков, т.е. не меньше $N/2$.

Игроки четвертой группы получили по $M-(L+1)/2$ очков – не больше $N/2-1$. Во второй и третьей группах результат равен $(N-1)/2$. Отсюда следует, что вторую группу составляют странные, первую – сильные, третью – средние, а четвертую – слабые. При этом число странных равно $[N/2]-L$, и за счет выбора L его можно сделать любым натуральным числом в пределах от 1 до $[N/2]-1$.

Задача 18. *Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше 2/3 от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными. Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные – менее трети. Более точно, если N имеет вид $3M$, $3M+1$ или $3M+2$ (M натуральное), то число странных не превосходит, соответственно, $M-2$, $M-1$, M.*

Решение. Рассмотрим «среднеарифметического» сильного игрока (т.е. сложим очки, набранные сильными, и разделим на число таких участников). Этот условный игрок выиграл у стольких же сильных, скольким и проиграл. При этом он проиграл всем странным. Поэтому сумма очков «среднеарифметического» сильного игрока не больше, чем число средних и слабых плюс половина числа сильных. Аналогично, результат «среднеарифметического» странного игрока не меньше, чем число сильных плюс половина числа странных. Но эта сумма меньше, чем в первом случае. Как следствие, общее число средних и слабых больше, чем половина общего числа сильных и странных. А это и означает, что сильные и странные составляют менее двух третей от всего состава игроков. Утверждение о численности странных вместе со слабыми доказывается аналогично.

Задача 19. *Постройте пример (для произвольного $N \geq 5$), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему $N/3$.*

Решение. Разделим участников турнира на три группы, причем в первые две включено по $[N/3]+1$ человек. Пусть игроки первой группы выиграли все матчи у игроков второй группы. Аналогично, вторая группа выиграла у третьей, а третья – у первой. Внутри каждой группы все матчи закончились вничью. Нетрудно убедиться, что третья группа состоит из странных, первая – из сильных и вторая – из слабых.

Задача 20. *Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ничьих ровно две и имеется странный игрок.*

Решение. Пусть число игроков нечетно, они занумерованы от 1 до $2M+1$ и меньшие номера выиграли у больших со следующими исключениями: вничью сыграли первый с M-м и $(M+2)$-й с последним, игрок с номером $M+1$ выиграл у всех предыдущих и проиграл всем последующим. Нетрудно убедиться, что сумма очков убывает с ростом номера и $(M+1)$-й игрок – странный.

Задача 21. *В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.*

Решение (найдено участниками конференции Турнира городов). Предположим, что странный игрок есть. Так как он один, то он не занимает ни первого, ни последнего места. Следовательно, первый игрок проиграл странному и, значит, набрал не более $n-2$ очков, а последний выиграл у странного и, значит, набрал не менее одного очка. С другой стороны, так как в турнире была ровно одна ничья, два игрока имеют полуцелые количества очков и $n-2$ игрока – целые. Таким образом, существуют игроки, набравшие 1, 2,..., $n-2$ очка.

Рассмотрим последнего игрока. Так как он выиграл у странного, он набрал ровно 1 очко, т.е. проиграл всем остальным. Тогда предпоследний игрок (если это не странный) выиграл у странного и у последнего и, значит, проиграл всем остальным. Повторяя это рассуждение, получаем, что ни один из слабых игроков не мог сыграть вничью. Аналогично, вничью не мог сыграть ни один из сильных игроков. Противоречие.

(Окончание следует)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Две незнакомые головоломки из знакомых деталей

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Винт и гайка. Очень может быть, что эта головоломка была придумана примерно в то же время, что и детали, из которых она состоит. Место ее рождения пока не удалось установить даже с точностью до континента. В Африке, Европе и Азии найдены ее варианты, состоящие из палочек с привязанными к ним колечками. У коряков, живущих на полуострове Камчатка, эта игрушка считается национальной головоломкой и известна с незапамятных времен.

Задача состоит в том, чтобы переместить одно из колец на петлю с другим кольцом. В конструкции, приведенной на фотографии, требуется соединить винт и гайку.

Как в большинстве хороших головоломок, задача сначала кажется неразрешимой. А решается она, можно сказать, «в лоб»! Нужно упрямо продвигать гайку по веревке до тех пор, пока она не соединится с винтом. Только не пытайтесь просунуть большую гайку через маленькое отверстие. Вместо этого вытягивайте через отверстие веревочный узел и продвигайте веревку по гайке, а не наоборот.

Болт и шайба. Эта замечательная головоломка создана московским изобретателем Кириллом Гребневым. Чтобы оценить ее, следует иметь в виду, что придумать головоломку, внешне простую, но трудную в решении, гораздо сложнее, чем состоящую из множества деталей. Далеко не каждому изобретателю головоломок это под силу. По совокупности достоинств игрушку «Болт и шайба» можно назвать лучшей головоломкой 2006 года, причем не только в России. Она оказалась самой популярной на ежегодной октябрьской встрече голландского клуба «NKC», объединяющего более 400 любителей головоломок из 38 стран.

Задача головоломки очевидна – нужно снять шайбу с болта. Чтобы это стало возможным, необходимо отцепить от шайбы удерживающий ее шнурок. Петлю, которая охватывает шайбу, можно двигать в двух направлениях, но лишь одно направление приводит к цели. Будем надеяться, что этой подсказки вам окажется достаточно.

Желаю успехов!

А.Калинин

Несколько задач на закон сохранения механической энергии

А.ЧЕРНОУЦАН

В этой статье представлены задачи, которые предлагались в последние годы на письменных вступительных экзаменах по физике в РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина. Эти задачи были отобраны по следующим критериям. Во-первых, при их решении используются подходы и методы, применение которых требует хорошего понимания физической сущности законов сохранения, что является сложным для многих абитуриентов. Во-вторых, преимущество отдавалось задачам, содержащим красивую физическую «изюминку» или подвох, что выделяет их в ряду аналогичных задач. В то же время, уровень сложности предлагаемых задач вполне «абитуриентский» (хотя и из верхнего эшелона), они не претендуют на высокое звание «олимпиадных».

Надеемся, что эта статья позволит вам глубже познакомиться с такой важной и нетривиальной темой, как закон сохранения механической энергии.

В первой группе из четырех задач внимание концентрируется на анализе возможных случаев, соответствующих различным соотношениям между исходными данными. Неумение увидеть скрытые в условии задачи возможности может привести к ошибочным результатам.

Задача 1. *Груз массой m = 1,6 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью k = 250 Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость v_0 = = 1 м/с, направленную вертикально вверх. На какую максимальную высоту (отсчитывая от начальной точки) поднимется груз?*

Наиболее часто встречающаяся ошибка состоит в том, что абитуриенты не обращают внимания на слова про резиновый шнур и решают задачу так, как будто груз висит на пружине. Однако шнур, в отличие от пружины, работает только на растяжение. Если шнур не растягивать, а «сжимать» (сближать его концы), то он теряет форму, изгибается, не оказывая никакого сопротивления.

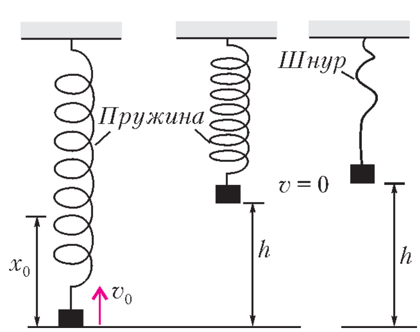


Рис. 1

Давайте и мы начнем решение со случая груза на пружине и посмотрим, не даст ли нам сам ответ (как это часто бывает) какую-нибудь подсказку, «сигнал» о том, что что-то не в порядке. Заодно поговорим о важном методическом приеме, помогающем существенно упрощать решение задач с вертикальными пружинами.

Запишем закон сохранения энергии системы, отсчитывая потенциальную энергию тяготения от начального положения груза (рис.1):

$$\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}=mgh+\frac{k\left(x_0-h\right)^2}{2}.$$

Здесь h – искомая высота, а x_0 – начальное растяжение пружины (шнура), которое находится из условия равновесия висящего груза:

$$kx_0-mg=0 .$$

Раскрывая скобки в законе сохранения энергии и подставляя x_0, приходим к совсем короткому уравнению

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{kh^2}{2} .$$

Заметим, что ускорение силы тяжести g вообще не вошло в конечное уравнение, как будто поле тяжести отсутствует. В чем причина? Здесь проявилось следующее свойство груза на пружине: если отсчитывать общую потенциальную энергию для равнодействующей силы тяжести и силы упругости от положения равновесия, то она принимает вид $E_п=ky^2/2$, где $y=x-x_0$ – смещение из этого положения. Действительно, равнодействующая сила в положении равновесия равна нулю, а при смещении груза на y возникает сила $F_y=-ky$, равная изменению силы упругости (сила тяжести не меняется). Поскольку сама равнодействующая такая же, как сила упругости, то и потенциальная энергия для нее такая же, как для чистой силы упругости. Это свойство часто используется молча, без всяких пояснений, например – при рассмотрении вертикальных колебаний груза на пружине.

Подставляя численные данные в последнее уравнение, находим искомую высоту:

$$h=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}=80\text{ мм} .$$

Вернемся к задаче со шнуром. Казалось бы, полученный ответ как в общем виде, так и в числовом выражении ничем не помогает нам заметить допущенную ошибку. Однако будем внимательны и, заподозрив подвох, проверим, остается ли шнур в *растянутом* состоянии до самого верхнего положения груза. Для этого вычислим начальное растяжение шнура x_0 и сравним его с h:

$$x_0=\frac{mg}{k}=64\text{ мм}<h=80\text{ мм} .$$

Видим, что груз при подъеме проходит точку, после которой шнур теряет свои упругие качества, изгибается, и сила упругости исчезает. Условие исчезновения силы упругости имеет вид

$$v_0\sqrt{\frac{m}{k}}>\frac{mg}{k}\text{ , или }v_0>g\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

В таком случае задачу надо решать заново.

Упрощающий подход с объединением силы тяжести и силы упругости больше не действует (на некотором этапе движения сила упругости исчезает), и закон сохранения энергии надо записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgh\ ,$$

откуда (с учетом равенства $x_0 = mg/k$) получим окончательный ответ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k} = 82\ \text{мм}\ .$$

Задача 2. *Груз подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае $F_1 = 3mg/4$, а во втором случае $F_2 = mg/4$. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором?*

Решим задачу сначала в предположении, что сила упругости действует все время движения, т.е. как бы мысленно заменим шнур пружиной. Запишем закон сохранения (точнее – изменения) энергии, используя сокращенную запись для полной потенциальной энергии системы(см. задачу 1):

$$Fh = \frac{kh^2}{2} - 0\ ,$$

откуда найдем искомую высоту:

$$h = \frac{2F}{k}\ .$$

В рамках сделанного предположения отношение высот в обсуждаемых двух случаях равнялось бы отношению внешних сил:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{F_1}{F_2} = 3\ .$$

Однако, наученные горьким опытом, мы должны проверить, остается ли шнур растянутым до достижения грузом максимальной высоты. Для этого должно выполняться условие $h < x_0$, т.е.

$$\frac{2F}{k} < \frac{mg}{k}\ ,\ \text{или}\ \ F < \frac{mg}{2}\ .$$

Это условие выполняется для второго случая, поэтому

$$h_2 = \frac{2F_2}{k}\ .$$

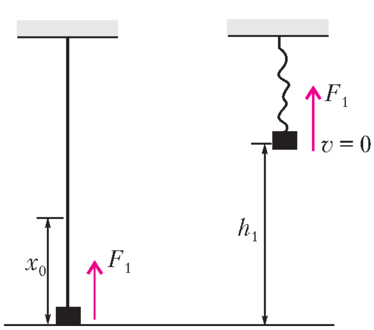


Рис. 2

Для первого же случая (рис.2) закон сохранения энергии надо написать заново (поскольку сила упругости на верхнем участке движения не действует, потенциальные энергии силы тяжести и силы упругости надо писать раздельно):

$$F_1h_1 = mgh_1 - \frac{kx_0^2}{2}\ .$$

Подставляя $x_0 = mg/k$, получим

$$h_1 = \frac{(mg)^2}{2k(mg - F_1)}\ .$$

Тогда окончательно

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{(mg)^2}{4F_2(mg - F_1)} = 4.$$

Задача 3. *Однородный стержень длиной $l = 2$ м, двигаясь вдоль своей длины по гладкой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения $\mu = 0{,}2$. Какое расстояние s проедет стержень с этого момента до остановки, если его начальная скорость $v_0 = 3$ м/с?*

Запишем закон сохранения энергии (теорему о кинетической энергии) в виде

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{mv_0^2}{2}\ .$$

Вычислим работу силы трения $A_{\text{тр}}$ в предположении, что сила трения в процессе движения все время возрастает, т.е. что стержень остановится до того, как целиком пересечет границу. В тот момент, когда стержень проехал расстояние x (рис.3), сила трения, действующая на кусок стержня длиной $x < l$, равна

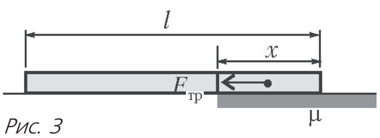


Рис. 3

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\frac{x}{l}\ .$$

Поскольку сила трения представляет собой линейную функцию пройденного расстояния, ее работу можно вычислить по формуле

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{2}s = -\frac{0 + \mu mg\dfrac{s}{l}}{2}s = -\frac{\mu mgs^2}{2l}\ .$$

Подставив в уравнение закона сохранения энергии, получаем

$$-\frac{\mu mgs^2}{2l} = -\frac{mv_0^2}{2}\ ,$$

откуда

$$s = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = 3\ \text{м}.$$

К сожалению, многие абитуриенты на этом заканчивают решение задачи, не заметив, что полученный ответ не имеет смысла, поскольку пройденное расстояние получилось больше длины стержня, а работа силы трения вычислялась в противоположном предположении. Правильное выражение для работы силы трения в случае $s > l$ имеет вид

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0 + \mu mg}{2}l - \mu mg(s - l)\ .$$

Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$s = \frac{l}{2} + \frac{v_0^2}{2\mu g} = 3{,}25\ \text{м}\ .$$

Конечно, можно поступить по-другому. Если сразу увидеть, что возможны разные случаи, то начать решение можно с выяснения того, какой случай реализуется. Например, найти минимальную скорость v_1 , при которой стержень полностью заедет на шероховатую поверхность:

$$0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{0 + \mu mg}{2}l\ ,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\mu gl} = 2\ \text{м/с}\ .$$

Поскольку $v_0 > v_1$, то ясно, что задний конец стержня обязательно пересечет границу.

Задача 4. *В шар массой $m_2 = 480$ г попадает пуля массой $m_1 = 20$ г, летящая со скоростью $v_1 = 100$ м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна $F_c = 1650$ Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара $d = 5$ см.*

Запишем для данного удара законы сохранения импульса и энергии, с учетом перехода механической энергии во внутреннюю за счет работы силы сопротивления:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + Q ,$$

$$Q = F_cd .$$

Исключая из этих уравнений конечную скорость пули

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2 ,$$

получим для конечной скорости шара u_2 квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)u_2^2 - 2v_1u_2 + \frac{2F_cd}{m_2} = 0 .$$

Решение этого уравнения

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2F_cd\left(m_1 + m_2\right)/\left(m_1m_2\right)}}{1 + m_2/m_1}$$

дает два положительных ответа: 2,5 м/с и 5,5 м/с. Какой из них выбрать?

Многие школьники привыкли, что один из ответов обычно получается отрицательным, и заранее отбрасывают решение с минусом перед квадратным корнем. Другие не знают, что делать с двумя положительными корнями, и выбирают наибольший (и получают неверный ответ!). На самом деле, надо вычислить скорость пули в каждом из случаев (используя написанную выше формулу, выражающую u_1 через u_2):

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2 = \frac{v_1 \mp \left(m_2/m_1\right)\sqrt{v_1^2 - 2F_cd\left(m_1 + m_2\right)/\left(m_1m_2\right)}}{1 + m_2/m_1} .$$

Видно, что если выбрать верхние знаки в формулах для u_2 и u_1 (плюс для шара и минус для пули), то скорость пули получится *меньше*, чем скорость шара: $u_1 < u_2$ (в данном конкретном случае u_1 отрицательна и равна $u_1 = -32$ м/с). Значит, пуля в этом случае оказывается с той же стороны от шара, с которой она подлетала. Это соответствует отскоку пули при ударе назад с потерей энергии Q (см. далее упражнение 4). Наоборот, если взять нижние знаки (минус для шара и плюс для пули), то скорость пули оказывается *больше*, чем скорость шара (в данном случае $u_1 = 40$ м/с), что соответствует ситуации, когда пуля пробивает шар насквозь и вылетает с другой стороны. Значит, правильный ответ для скорости шара соответствует *меньшему* корню: $u_2 = 2{,}5$ м/с.

В следующей задаче упор делается на выбор правильного условия, определяющего конечное состояние системы.

Задача 5. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 100$ г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость $v_1 = 10$ м/с в направлении второго бруска. Найдите минимальную скорость этого бруска в процессе дальнейшего движения.*

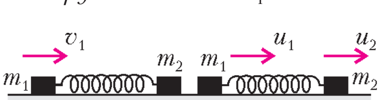


Рис. 4

Запишем законы сохранения импульса и энергии системы (рис.4):

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2, \quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где x – деформация пружины. Главное для решения задачи – понять, чем интересующий нас момент, когда скорость бруска массой m_1 минимальна, отличается от всех остальных моментов движения. Для этого надо рассмотреть действующие на первый брусок силы.

Как только брусок массой m_1 придет в движение, пружина начнет сжиматься, и на него будет действовать сила упругости, направленная навстречу движению. Предположим, что скорость этого бруска не меняет направления, т.е. что u_1 все время положительна (позже нам придется проверить это предположение). Тогда скорость u_1 будет уменьшаться по модулю до тех пор, пока на брусок действует сжатая пружина. Когда пружина перейдет в растянутое состояние, сила упругости будет направлена по движению, и скорость бруска начнет возрастать. Минимальная скорость соответствует тому моменту, когда пружина снова (как до начала движения) придет в недеформированное состояние, т.е. когда $x = 0$. В этот же момент скорость второго бруска будет максимальной.

Система уравнений в этот момент

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2, \quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

совпадает с системой уравнений для центрального упругого удара (т.е. пружина как бы осуществляет растянутый по времени упругий удар). Решение этой задачи хорошо известно, мы приведем его без вывода:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = 6 \text{ м/с}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 = 16 \text{ м/с} .$$

Если скорость u_2 всегда положительна, т.е. получен правильный ответ для максимальной скорости второго бруска при любом соотношении масс, то скорость u_1 остается положительной только при условии $m_1 \ge m_2$. Если $m_1 < m_2$, то в процессе движения скорость первого бруска меняет знак, и ответ для минимальной скорости такой: $u_1 = 0$.

Отметим интересное отличие этой задачи от центрального упругого удара, например, двух шаров. Шары после удара перестают взаимодействовать и разлетаются. В нашем же случае пружина, соединяющая бруски, после рассмотренного момента растягивается, первый брусок начинает тормозиться, второй – разгоняться. Через некоторое время скорость первого бруска достигнет максимального значения u_1', а скорость второго – минимального u_2'. Пружина в этот момент опять не деформирована, т.е. эти скорости подчиняются той же самой системе уравнений. Поскольку скорости должны отличаться от найденных, они представляют собой второе решение этой системы, которое в задаче о центральном упругом ударе отбрасывают: $u_1' = v_1$, $u_2' = 0$.

Последние две задачи связаны с движением по окружности. Первая из них иллюстрирует, как можно описать движение модельного твердого тела, состоящего из точечных масс, закрепленных на невесомом стержне. Вторая показывает, как использовать движущиеся системы отсчета в задачах на законы сохранения при движении по окружности.

Задача 6. *Невесомый стержень, на концах которого закреплены два груза массой $m = 0{,}5$ кг каждый, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Ось делит* *стержень в отношении 1:3. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он действует на ось в вертикальном положении?*

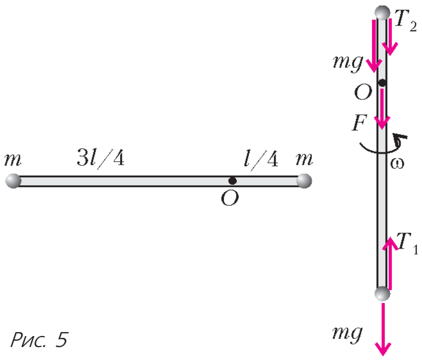


Рис. 5

Если в вертикальном положении сила натяжения нижней части стержня T_1, а верхней T_2, то действующая на ось сила равна (рис.5)

$$F = T_1 - T_2 .$$

Силы натяжения стержней найдем из выражений второго закона Ньютона для грузов:

$$T_1 - mg = m\omega^2 \cdot 0,75l,$$

$$T_2 + mg = m\omega^2 \cdot 0,25l,$$

где l – длина стержня. Отметим, что написанные формулы годятся и в том случае, когда верхняя часть стержня находится в сжатом состоянии ($T_2 < 0$). Угловую скорость вращения ω найдем из закона сохранения энергии системы (уровень отсчета потенциальной энергии примем в точке подвеса):

$$0 = mg \cdot 0,25l - mg \cdot 0,75l + \frac{m(0,25l\omega)^2}{2} + \frac{m(0,75l\omega)^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = 1,6\frac{g}{l} .$$

Окончательно получаем

$$F = T_1 - T_2 = 2mg + 0,5m\omega^2 l = 2,8mg = 14 \text{ Н} .$$

Задача 7. *Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R (рис.6). Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой $m_1 =$ 0,2 кг съезжает с высоты $h = 3R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза на поверхность в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой m_2 в 4 раза больше массы груза.*

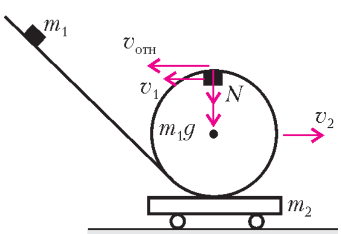


Рис. 6

Чтобы найти силу давления (точнее, нормальную силу реакции N), надо записать второй закон Ньютона для верхней точки петли. Но тут возникает проблема: в системе отсчета, связанной с землей, траектория движения груза отлична от окружности, поскольку тележка с установкой движутся с переменной скоростью. Это значит, что радиус кривизны траектории груза может отличаться от R. Выход состоит в том, чтобы записать второй закон Ньютона в системе отсчета, связанной с тележкой, где движение происходит по окружности радиусом R. Однако есть возражение: тележка под действием силы давления груза движется с ускорением, а значит, связанная с ней система отсчета не является инерциальной. Это возражение справедливо для всех моментов движения, кроме тех, когда груз проходит нижнюю и верхнюю точки петли. В эти моменты сила давления направлена вертикально и ускорение тележки равно нулю, следовательно, силы инерции, которые действуют все остальное время, обращаются в ноль.

Запишем второй закон Ньютона для верхней точки петли:

$$m_1 g + N = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{R} .$$

Здесь $v_{\text{отн}}$ – скорость груза относительно тележки, равная

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 ,$$

где v_1 и v_2 – проекции скоростей груза и тележки на горизонтальную ось. Эти скорости мы найдем из законов сохранения импульса и энергии:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_1 g \cdot 2R,$$

откуда

$$v_1^2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} g(h - 2R) = \frac{8}{5} gR ,$$

и

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 = v_1 + \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_1 = \frac{5}{4} v_1 .$$

Подставляя $v_{\text{отн}}$ во второй закон Ньютона, получим

$$N = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{R} - m_1 g = \frac{25}{16}\frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 g = \frac{3}{2} m_1 g = 3 \text{ Н} .$$

Упражнения

1. Груз массой 5 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 500 Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна 0,5 м/с, во втором – 2 м/с. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом?

2. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой 15 Н, направленной в первом случае вертикально вверх, а во втором случае – вертикально вниз. На сколько процентов расстояние, пройденное грузом до остановки, во втором случае меньше, чем в первом?

3. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент равна 1,6 м/с. Какое расстояние (в см) проедет стержень от этого момента до остановки, если коэффициент трения о шероховатую поверхность равен 0,2?

4. В шар массой 480 г попадает пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, при этом при ударе выделяется 90 Дж тепла. Найдите конечную скорость шара.

5. Невесомый стержень, на конце которого закреплен груз массой 3 кг, а в середине – груз массой 4 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его свободный конец. Стержень приводят в верхнее положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось в момент прохождения нижнего положения?

6. Два бруска массами 0,5 кг и 1 кг, лежащие на гладком полу, соединены пружиной жесткостью 900 Н/м. Вначале первый брусок упирается в стену, пружина не деформирована и расположена перпендикулярно стене. Второй брусок перемещают на 10 см в сторону первого и отпускают. Найдите максимальную скорость первого бруска в процессе дальнейшего движения.

7. Брусок стоит на гладкой горизонтальной плоскости. На бруске закреплен штатив, к которому на легкой нити подвешен груз массой 0,1 кг. Масса бруска вместе со штативом равна массе груза. Вначале нить с грузом удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в момент, когда груз находится в нижней точке.

Материалы вступительных экзаменов 2006 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов»-2006)[1]

1. Вычислите

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}.$$

2. Что больше: $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трехчлена $11x^2-17x-13$?

3. Решите уравнение

$$\cos\left(x^2+x\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

5. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x.$$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x-2a\sin x-|2a-1|+2=0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB=90^\circ$, $BC=\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 – центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n\ge 2$ точка O_n – это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m\times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m<n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n.

10. Решите неравенство

$$4\left(1-\operatorname{tg}x\right)^{2004}+\left(1+\operatorname{tg}x\right)^{2006}\ge 2^{2006}.$$

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трехзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найдите исходное трехзначное число.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\ge\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

3. Две сферы касаются друг друга внешним образом. Радиус одной сферы в три раза больше радиуса другой. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны некоторой плоскости, проходящей через центры сфер. Каждая из прямых a и b касается обеих сфер, а расстояние между этими прямыми равно диаметру меньшей сферы. Найдите угол между прямыми a и b.

4. Решите уравнение

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

5. Отрезок KB является биссектрисой треугольника KLM. Окружность радиусом 5 проходит через вершину K, касается стороны LM в точке B и пересекает сторону KL в точке A. Найдите угол K и площадь треугольника KLM, если $ML=9\sqrt{3}$, $KA:LB=5:6$.

6. Найдите минимальное значение выражения

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|,$$

где x и y – произвольные действительные числа.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2006», апрель)

1. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}(x+2y)^{x-y}=25,\\ 2\log_5(x+2y)+x-y=4.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}}\ge 50x-2x^2-309.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Известно,

[1] *Эта олимпиада рассматривалась в качестве 3-го тура Всероссийской олимпиады школьников, и ее победители зачислялись на различные факультеты МГУ.*

что $AM : BC = \sqrt{13} : 2$, а угол BAC равен 30°. Найдите углы ABC и ACB, считая, что угол ABC не меньше угла ACB.

4. Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{2}$.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$. На ребре SC выбрана точка K так, что $CK:KS = 2:5$. Плоскость, проходящая через точки A, B и K, пересекает ребро SD в точке L. Известно, что $V_{SABKL} : V_{SABCD} = 95 : 189$ (V_{SABKL} и V_{SABCD} – объемы пирамид $SABKL$ и $SABCD$ соответственно). Найдите отношение длин оснований трапеции $ABCD$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2(1+\cos 2x)^2 |\sin(2x+a)| =$$
$$= 2\cos 2x - 2\cos(4x+2a) - \cos(6x+2a) - \cos(2x+2a)$$

имеет решения.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок C, расположенный на дороге между A и B. Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли, соответственно, в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт C.

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$

3. Решите неравенство

$$11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и до прямых AD и AC равны 10, 8 и 6 соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. При каждом значении параметра d решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2} + \sqrt{x - y + d}\,\sqrt{4 - 2x + d} +$$
$$+ \sqrt{-2x^2 - 2xy + (5d+4)x + (d+4)y - 2d^2 - 8d} = 4.$$

6. Две касающиеся друг друга сферы вписаны в двугранный угол. Первая сфера касается граней этого двугранного угла в точках A и B соответственно. Вторая сфера касается одной из граней этого двугранного угла в точке C. Точки A и C лежат в разных гранях. Первая сфера пересекает отрезок AC в точке K, отличной от A, а вторая сфера пересекает тот же отрезок в точке L, отличной от C. Длина отрезка KL в 7 раз меньше длины отрезка AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что расстояние между точками B и C равно $2\sqrt{7}$.

Вариант 5

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 3x = \cos 5x + \frac{4\pi}{3}\sin x.$$

2. Решите уравнение

$$9^{x-1}\cdot 3^{2x}\cdot 4^{4x} + 16^{x-1}\cdot 3^{4x}\cdot 2^{4x} - 25 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{(3-x)\sqrt{2x^2+2x-4}} \le 3 - x.$$

4. В треугольнике LMN дано: $LN : NM = 7 : 3$, расстояние от середины биссектрисы NK до стороны NM равно $3/2$, площадь ΔLMN равна 30. Найдите LN.

5. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{9x^2 - y^2} = 6, \\ y\sqrt{(3x+y)(3x-y)} = 2 \end{cases}$$

и, считая в них x и y координатами точек, укажите, какая из этих точек ближе к началу координат.

6. В трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) $PQ \ne RS$. Две прямые, параллельные основаниям QR и PS, делят трапецию на 3 части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиус наименьшей из этих окружностей в 2 раза меньше радиуса средней окружности. Найдите отношение радиуса наибольшей из этих окружностей к радиусу наименьшей.

7. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$\left(2\log_a|x-1| - \log_a x - 1\right)\left(2\log_{a^2}|x+5| - \log_a 3a + 1\right) = 0$$

больше чем $8a + 1$?

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S даны $SK = 12$, $KL = 18$. На боковых ребрах SL и SM взяты точки A и B соответственно так, что $SA = SB = 4$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, K и M.

Вариант 6

(химический факультет, факультет наук о материалах)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{1 - |x|} \ge x - 2.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > 2.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$$

4. Биссектрисы внутренних углов в параллелограмме $ABCD$ образуют четырехугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найдите сумму квадратов всех сторон в четырехугольнике $EFGH$, если $AB = BC + \frac{3}{2}$.

5. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно 49:12. Найдите отношение удвоенного объема шара к объему конуса.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{(x^2+|x|)(x^2+5|x|+6)+1} = 3|x| - 3ax - a^2 - a + 1$$

имеет корни как большие −3, так и меньшие −3.

Вариант 7

(биологический факультет)

1. Решите неравенство
$$\sqrt{x+1}\left(x^2+3x-4\right)\ge 0 .$$

2. Решите уравнение
$$3\cos 2x+11\sin x=7 .$$

3. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $AD = 1$ вписан в круг. Найдите радиус этого круга.

4. Решите уравнение
$$9^{\arcsin(2x+1)}+\log_3\left(2\arcsin\left(2x+1\right)\right)-$$
$$-3^{\arccos(6x+3)}+\log_{\frac{1}{3}}\arccos\left(6x+3\right)=0 .$$

5. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение плот и лодка соответственно. В тот же момент времени из пункта B навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 8 проведена диагональ AC' и на ней отмечена точка E так, что $AE = 5$. Через точку E проведена плоскость, перпендикулярная AC'. Найдите площадь образовавшегося сечения куба.

Вариант 8

(факультет почвоведения)

1. Найдите $\left(\frac{5\pi}{6}+2\alpha\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

2. Решите уравнение
$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x^3} .$$

3. Решите неравенство
$$\left(3\sqrt{x}\right)^{\log_2 x}\ge 1 .$$

4. Из деревни в одном и том же направлении выходят три пешехода: второй – через 2 минуты после первого, а третий – через 3 минуты после второго. Через 5 минут после своего выхода из деревни третий пешеход догнал второго, а еще через 2 минуты он догнал первого пешехода. Через сколько времени после своего выхода из деревни второй пешеход догонит первого?

5. Найдите наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

6. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $BC = 8$ и $AC = 7$, AD – биссектриса угла BAC. Окружность проходит через точку A, касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

7. Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases}x^2+y^2-5x+6y+4=0,\\ y+ax+ab=0\end{cases}$$
имеет ровно два различных решения (x, y).

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите уравнение
$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=3(x-1) .$$

2. Числа y и z таковы, что последовательность $1, \sqrt{y}, \sqrt{z}$, а также последовательность 1, $y - 1$, $z - y$ являются арифметическими прогрессиями. Найдите разность второй прогрессии.

3. Решите уравнение
$$2\sin x-\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x-1=0 .$$

4. Длина дороги, соединяющей два населенных пункта, составляет 280 километров. Легковой автомобиль проезжает дорогу за 4 часа, а грузовик – за 5 часов. По дороге оба автомобиля двигаются с постоянными скоростями, кроме участков, где в соответствии с ограничениями их скорость составляет 40 километров в час. При отсутствии этих ограничений скорости легковой автомобиль проезжал бы дорогу на 1 час и 10 минут быстрее грузовика. Найдите: а) суммарную длину участков, где скорость ограничена 40 километрами в час; б) скорости легкового автомобиля и грузовика.

5. Периметр трапеции $ABCD$ равен 44. Окружность пересекает основание AB в точках K и L, сторону BC – в точках M и N, основание CD – в точках P и R, сторону AD – в точках S и T, причем $AK < AL$, $CN < CM$, $CP < CR$, $AT < AS$. Известно, что $KL = MN = 1$, $PR = ST = 7$, $AK = 5$, $CP = \frac{1}{2}$. Найдите длины оснований трапеции.

6. При каких значениях параметра c число решений уравнения
$$2x\arcsin\left(\sin x\right)=c\cdot 3^{\log_3 x}+3$$
конечно?

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство
$$\frac{x^2-9}{|x|-3}(x+4)\ge 0 .$$

2. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{5}{2}x^2-x^3}\ge\sqrt{6x-\frac{5}{2}x^2} .$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна 5, разность углов BAC и ABC равна $\frac{\pi}{10}$, точка D – середина AB. Чему равно расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ACD и BCD?

4. Решите неравенство
$$\left(\log_{|x+2|}4\right)\left(\log_4\left(x^2+x-2\right)\right)\le 1 .$$

5. В сосуде объемом 5 литров находилось некоторое количество 30%-го раствора кислоты. Затем в сосуд было добавлено какое-то количество 40%-го раствора такой же кислоты, в результате чего сосуд был заполнен полностью. После этого из сосуда было отлито 0,5 литра полученного раствора и затем опять налито такое же количество 40%-го раствора. В результате сосуд оказался заполненным 34%-м раствором. Сколько литров раствора было в сосуде первоначально? Процентные содержания растворов считаются объемными.

6. Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\left(\sin 2x + \cos 3x\right)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале $(1; 2)$.

7. Плоскость пересекает боковые ребра DA и DB треугольной пирамиды $DABC$ в точках K и L соответственно и делит объем пирамиды пополам. В каком отношении эта плоскость делит медиану DN грани DBC, если $\frac{DK}{DA} = \frac{2}{3}$, $\frac{DL}{DB} = \frac{4}{5}$?

8. Найдите значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$ на отрезке с концами в точках $a - 1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

Вариант 11

(филологический и социологический факультеты)

1. Решите неравенство

$$\frac{5 - 4x}{|x - 2|} \le |2 - x|.$$

2. Окружности радиусов 7 и 3 касаются внутренним образом. В большей окружности существуют ровно три различные хорды, имеющие одинаковую длину и касающиеся меньшей окружности. Найдите длины отрезков, на которые эти хорды делятся точками касания.

3. Найдите все решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 - 2x\sin \pi y - \cos 2x + 2\cos^2 x + \sqrt{-4xz - z^2 - 3} = (1 + 2xz)\log_2^2 \frac{2y}{z}.$$

4. Накануне экзамена Лиза и ее товарищ искали на Воробьевых горах четырехлистный клевер, приносящий, по народной примете, удачу. В первый день товарищ нашел на 20 процентов четырехлистников больше, чем Лиза. Во второй день, наоборот, товарищ нашел на 30 процентов четырехлистников меньше, чем Лиза в этот день. Всего за два дня Лиза нашла на 10 процентов больше четырехлистников, чем ее товарищ. Какое минимальное количество четырехлистников нашли студенты?

5. В правильную треугольную пирамиду вписан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ объема 8 так, что его грань $A_1B_1C_1D_1$ лежит в плоскости основания пирамиды – треугольника со стороной 6, ребро CD противоположного основания лежит в боковой грани пирамиды, а вершины A и B принадлежат другим боковым граням. Найдите высоту пирамиды.

6. Для каждого натурального значения параметра k найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости (x, y) условиями

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x \ge 0 \\ \sin y \le 0, \end{array}\right. \\ -\pi k \le x \le \pi k, \\ -\pi k \le y \le \pi k. \end{cases}$$

Вариант 12

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите уравнение

$$2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{13-2x}\left(x^2 - x + 1\right)\log_{7-x}(13 - 2x) < \log_{2x-1}\left(2 - 2x - (x - 1)^2 + x^2\right).$$

3. Найдите все значения x из интервала $(8;12)$, для которых справедливо равенство

$$2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\sin x = \sqrt{6 - 6\cos\frac{14\pi}{5}}.$$

4. Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля одной первой бригадой отличается от времени вспашки поля одной второй бригадой не более чем на $\frac{1}{25}$ часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, то затраченное на вспашку поля время составит $\frac{2}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определите количество тракторов в каждой бригаде.

5. В прямоугольном треугольнике ADC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найдите DB, если $\angle DBE = 30°$, $S_{DEC} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

6. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$4a^2\sqrt{2 - \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{3} - 2x\right)} + \frac{12a}{\pi}\arccos\left(2x - \sqrt{3}\right) - 8a^2 - 3a \le 1$$

выполняется для любых $x \in \left[\frac{2\sqrt{3} - 1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

7. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости двойным неравенством

$$x - \left|1 - x^2\right| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7 \le y \le \sqrt{4 - x^2}.$$

Вариант 13

(Московская школа экономики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x + 3} = 9 - x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(\log_3(x - 2)\right) \ge -1.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{1 + 2\cos 2x} = 0.$$

4. Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?

5. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \left|x^2 - 2x\right| < y + 1, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

6. Треугольник ABC, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{14}{\sqrt{3}}$. Найдите периметр треугольника, если он меньше 40 и $AC = 14$.

7. При всех значениях параметра b решите неравенство

$$2(b - 1)\sqrt{3x + 1} + 1 \ge 3bx + b - 3x.$$

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\left|7^x - 3\right| = 7^x + 1 .$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{x-1}(x-2)} < \sqrt{2} .$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(3\left|\sin x\right| - \left|\cos x\right|\right) + \log_2\left|\cos x\right| = 0 .$$

4. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C). Другая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках D и E (точка D лежит между точками A и E). Известно, что продолжения отрезка BD за точку D и отрезка CE за точку E пересекаются в точке F. Кроме того, $FE = 1$, $AC = 2AE$. Найдите FD.

5. При всех a решите систему неравенств

$$\begin{cases} |2x + 2a| > |x| + a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

6. Решите уравнение

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162 .$$

Вариант 15

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \ge 1 + \frac{16}{x-3} .$$

2. Решите уравнение

$$3 + 6\cos 2x + 3\cos 4x + 2\cos 6x = 0 .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{243 + 9x - 2x^2}{2x+3}} > 9 - x .$$

4. В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD, пересекающиеся в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PBQ, если длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $4\sqrt{3}$, величина угла ACB равна 60°.

5. Решите уравнение

$$12\left(3^{4x^2+2x-1} - 1\right)^2 - \left(3^{2(x-1)+4x^2} + \frac{1}{3}\right)\left(3^{4x^2+2x+1} - 3\right) = 16 .$$

6. Решите неравенство

$$\left(3 - \log_{\left|2x+\frac{1}{2}\right|}\left(\frac{1}{4} - x\right)\right)\log_3\left(\frac{1}{4} - x\right) < 2\log_3\left|2x + \frac{1}{2}\right| .$$

7. Точки K, L, M, N с координатами $(-2; 3)$, $(1; 4)$, $(3; 2)$, $(-1; -1)$ лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ соответственно. Найдите его площадь.

Вариант 16

(факультет государственного управления)

1. На розовом кусте каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 - 10x^2 + 25} = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} .$$

3. В прямой угол равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найдите площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

4. Решите уравнение

$$\sin\left|1 - 2x\right| + \cos x = 0 .$$

5. Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N, обсуждая планы объединения усилий, установили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три других – 60%; K, L, N без M – 66%; три предприятия без N – 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

6. Найдите значения a, для которых неравенство

$$(a + b + 36)x^2 - 5(x-1)(b+1) \le 0$$

имеет решение при любом b.

7. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трех насосов равна семи цистернам в сутки.

Вариант 17

(факультет глобальных процессов)

1. Решите неравенство

$$\left(|x+1| + |2x-1|\right)\lg\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^{2x} \ge 0 .$$

2. Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X – расходы на производство, A – некоторая положительная постоянная. В 2004 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X. В 2005 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найдите отношение расходов в 2004 году к расходам в 2005 году.

3. Решите неравенство

$$\frac{\left|x^2 + x - 12\right|}{x-3} \ge 1 .$$

4. Решите уравнение

$$\log_{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}\left|1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right| = \log_{\cos\left|\frac{x}{2}\right|}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} .$$

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL, точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO : OL = 3 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABL.

6. Найдите минимально возможный объем прямого кругового конуса, описанного вокруг шара единичного радиуса.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(25^x - 9 + a - y\right) = 0, \\ y \cdot 5^{-x} + \sqrt{a-1} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0 \le 0$.

8. Сравните числа $x_* = \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{16}}}$ и k_*, где k_* – корень уравнения

$$\left(k^2 - 1\right)^8 = \frac{1}{2(k-1)}.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. На средние части двух одинаковых катушек, лежащих на горизонтальной плоскости, намотана тонкая нерастяжимая нить (рис.1). Точку A этой нити, находящуюся на равных расстояниях от осей катушек, начинают перемещать вертикально вверх. При этом катушки начинают катиться без проскальзывания так, что их оси не изменяют своего направления, нить не скользит по катушкам, а ее отрезки, не лежащие на катушках, находятся в вертикальной плоскости, перпендикулярной осям катушек. Найдите модуль скорости сближения катушек в тот момент, когда скорость точки A равна v, а угол $2\alpha = 120°$. Радиус средней части катушки в $n = 2$ раза меньше радиуса ее щек.

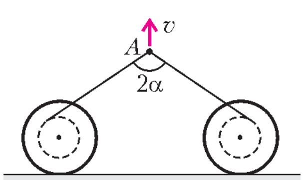


Рис. 1

2. В закрепленную полусферу радиусом R бросили маленький тяжелый шарик так, что его скорость в момент удара о внутреннюю поверхность полусферы в точке A составляла с горизонтом угол $\alpha = 15°$. После этого удара шарик вновь ударяется о поверхность полусферы в точке B, лежащей на одной горизонтали с точкой A, затем опять попадает в точку A и так далее. Считая удары шарика абсолютно упругими, найдите модули его скоростей при ударах в точках A и B.

3. На закрепленном цилиндре, ось которого горизонтальна, удерживают невесомую нерастяжимую нить, к концам которой прикреплены маленькие грузы разных масс. Нить располагается в вертикальной плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра, а грузы находятся на горизонтальной прямой, проходящей через ось цилиндра. Найдите отношение масс грузов n, если после отпускания нити без толчка более легкий груз отрывается от поверхности цилиндра в его верхней точке. Трением и влиянием воздуха на движущиеся тела пренебречь.

4. К невесомой вертикальной пружине жесткостью k подвешена за конец однородная тонкая веревка массой M длиной L. После быстрого отрезания нижней части веревки длиной nL $(n < 1)$ оставшаяся ее часть начинает совершать колебания. При каком максимальном значении n эти колебания будут гармоническими для всех частей оставшейся висеть на пружине веревки? Считать, что непосредственно при отрезании веревка оставалась неподвижной.

5. В стоящем на столе вертикальном цилиндре под поршнем массой M и площадью S содержится один моль гелия. С помощью спирали, находящейся внутри цилиндра, газ начинают медленно нагревать, при этом поршень сразу начинается подниматься. Модуль силы трения поршня о цилиндр равен F. Пренебрегая теплообменом с внешней средой и теплоемкостью поршня с цилиндром, найдите теплоемкость C системы «цилиндр–поршень–газ». Атмосферное давление равно p_0.

6. Моль аргона изотермически расширяется, совершая работу A, затем после изохорного охлаждения адиабатическим сжатием возвращается в исходное состояние. Максимальное изменение температуры газа за цикл равно ΔT. Найдите КПД η этого цикла.

7. Внутри проводящей сферы радиусом R, имеющей заряд q, концентрично с ней расположена сфера радиусом r (рис.2). Внутренняя сфера тонким длинным изолированным проводом, проходящим через маленькое отверстие во внешней сфере, с помощью ключа K заземлена. Найдите максимальное количество теплоты Q, которое может выделиться, если ключ K перевести из положения *1* в положение *2*, соединив тем самым внутреннюю сферу с землей через источник с ЭДС $\mathcal{E}$.

8. Найдите силу электростатического взаимодействия между обкладками плоского воздушного конденсатора через достаточно большой промежуток времени после замыкания ключа K в схеме, показанной на рисунке 3. Площадь каждой обкладки конденсатора S. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь, диод D считать идеальным. Емкость конденсатора, ЭДС батареи и сопротивления резисторов указаны на рисунке.

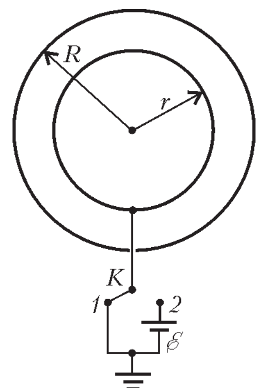


Рис. 2

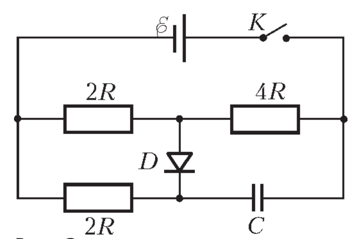


Рис. 3

9. Для измерения индуктивности L катушки можно использовать схему, показанную на рисунке 4. Она состоит из конденсатора известной емкости C, сдвоенного реостата, амперметра A и генератора гармонического напряжения, частоту которого можно изменять в широких пределах. Процесс измерения сводится к установлению такого одинакового значения сопротивления каждого из реостатов, при котором показания амперметра перестают изменяться при изменении частоты ω генератора. Зная амплитуды напряжения U и тока I при указанном выше условии, найдите L.

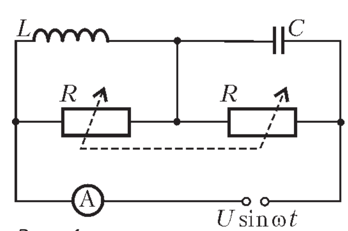


Рис. 4

10. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$, находящуюся в воздухе, нормально падает пучок белого света. Найдите наименьшую толщину пленки d, при которой от нее будут наиболее интенсивно отражаться фотоны с энергией $W = 3{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. С края бетонированного желоба, сечение которого изображено на рисунке 5, бросают в горизонтальном направ-

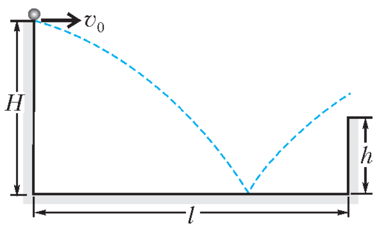


Рис. 5

лении маленький шарик. Какие значения может иметь величина начальной скорости шарика v_0 для того, чтобы он, ударившись один раз о дно желоба, выпрыгнул на его противоположную сторону? При расчетах положить $H = 0{,}9$ м, $h = 0{,}5$ м, $l = 2$ м. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Удар шарика о дно желоба считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Преследуя добычу со скоростью $v = 108$ км/ч, гепард движется по прямой горизонтальной тропе прыжками длиной $l = 8$ м. Внезапно на пути гепарда встречается овраг глубиной $H = 4/3$ м. Отталкиваясь от края оврага точно так же, как и при движении по тропе, гепард прыгает в овраг. Найдите горизонтальное перемещение гепарда L при этом прыжке. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать, дно оврага считать горизонтальным.

3. Фишки для игры в домино укладывают на горизонтальную поверхность ступенчатой стопкой, смещая вдоль длинной стороны каждую последующую фишку по отношению к предыдущей на $d = 2$ мм. Какое максимальное количество фишек N можно уложить таким образом, прежде чем стопка развалится? Длина каждой фишки $l = 4$ см.

4. Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 0{,}1$ рад и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найдите максимальную величину вертикальной составляющей скорости маятника $v_{y\,\max}$. Длина маятника $l = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

5. Два шарика массами m и $2m$ прикреплены к пружинам жесткостями k и $8k$ соответственно и надеты на гладкий горизонтальный стержень (рис.6). Свободные концы пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия пружины не деформированы, а шарики касаются друг друга. Шарик массой m отводят влево на небольшое расстояние и отпускают без начальной скорости. Найдите время τ между первым и вторым соударениями шариков, считая их абсолютно упругими.

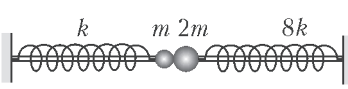


Рис. 6

6. На металлическую пластинку напыляют серебряное покрытие, используя пучок атомов серебра, направленный перпендикулярно пластинке. С какой скоростью v_0 растет толщина покрытия, если атомы серебра оказывают на пластинку давление $p = 0{,}1$ Па? Кинетическая энергия одного атома $E = 10^{-17}$ Дж, молярная масса серебра $\mathrm{M} = 108$ г/моль, его плотность $\rho = 10{,}5$ г/см^3. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

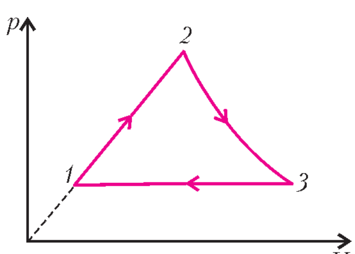


Рис. 7

7. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 7. На участке *1–2* давление газа изменяется пропорционально объему. Участок *2–3* – адиабатическое расширение, участок *3–1* – изобарное сжатие. Чему равен коэффициент полезного действия двигателя η, если в процессе *1–2* давление газа увеличивается в $n = 2$ раза, а в процессе *3–1* объем газа уменьшается в $m = 3$ раза?

8. В теплоизолированном вертикальном цилиндре под тяжелым теплоизолирующим поршнем находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда H. Сверху на поршень медленно насыпают порцию песка, масса которой m значительно меньше массы поршня. На какую величину ΔU изменится в результате этого внутренняя энергия газа? Ускорение свободного падения равно g.

9. Два маленьких одноименно заряженных шарика массами m_1 и m_2 соединены друг с другом невесомой нитью длиной l. Первоначально шарики покоятся, при этом нить натянута с силой T. Затем нить пережигают, дав шарикам возможность свободно двигаться. Определите расстояние между шариками L в тот момент, когда первый шарик имеет импульс p_1. Действием всех сил, кроме сил электростатического отталкивания, пренебречь.

10. Из 12 одинаковых непроводящих стержней собран каркас в форме куба (рис.8). Когда по сторонам куба AD и BC равномерно распределили одинаковые заряды, величина напряженности электрического поля и потенциал в центре куба – точке O – оказались равными E_0 и φ_0 соответственно. Какими станут напряженность поля E_1 и потенциал φ_1 в точке O, если такие же равномерно распределенные заряды дополнительно разместить на сторонах A_1B_1 и C_1D_1?

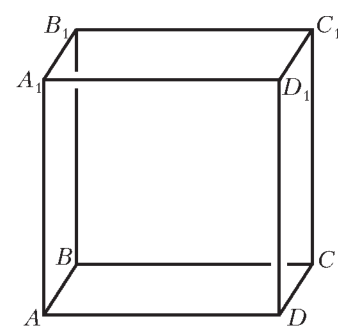


Рис. 8

11. Конденсатор емкостью $C_0 = 0{,}2$ мкФ заряжают до напряжения $U_0 = 360$ В и отсоединяют от источника. Затем к этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью $C = 1{,}8$ мкФ, в результате чего последний заряжается. Отсоединив зарядившийся конденсатор, к конденсатору емкостью C_0 подключают второй незаряженный конденсатор емкостью C, который после зарядки отсоединяют, и так далее. Всего таким образом от конденсатора емкостью C_0 заряжаются $n = 20$ одинаковых конденсаторов емкостью C каждый, которые затем соединяют последовательно. Чему будет равно напряжение U на концах полученной цепи конденсаторов?

12. Электрическая схема, изображенная на рисунке 9, состоит из источника ЭДС, пяти одинаковых лампочек сопротивлением R каждая и переменного резистора. Каким нужно сделать сопротивление r переменного резистора, чтобы лампочка *1* светилась в 4 раза ярче, чем лампочка *2*? Считать, что яркость свечения лампочки пропорциональна тепловой мощности, выделяющейся в ней. Принять, что сопротивление лампочек не зависит от выделяющейся в них мощности.

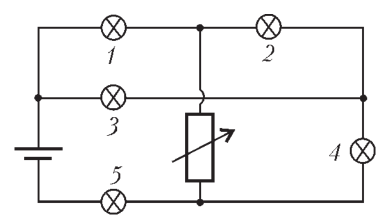


Рис. 9

13. Из двух кусков медной проволоки одинаковой длины и разного поперечного сечения изготовлен квадрат $ACDEA'$, разомкнутый в одной из

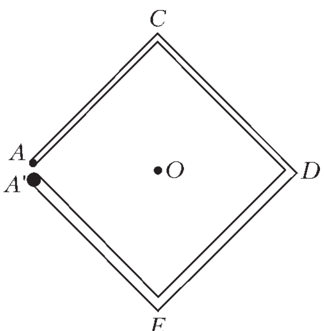


Рис. 10

вершин (концы проволок обозначены точками A и A' на рисунке 10). Площадь сечения проволоки на участке ACD вдвое меньше, чем на участке DEA'. Когда к точкам A и A' подключили источник постоянного тока, оказалось, что магнитная индукция в центре квадрата (точка O) равна B_0. Какова будет магнитная индукция B в центре квадрата, если соединить между собой точки A и A' и тот же источник подключить к вершинам A и D? Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Расстояние между точками A и A' считать малым.

14. Заряженный конденсатор подключили к катушке индуктивности (рис.11), в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда ток через катушку обратился в ноль, с помощью ключа K отсоединили эту катушку и вместо нее подсоединили катушку с вдвое большей индуктивностью. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?

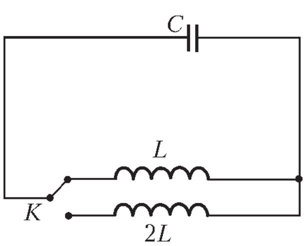


Рис. 11

15. На зеркальный шар падает узкий параллельный пучок света, ось которого проходит через центр шара. Диаметр отраженного от шара пучка, измеренный на расстоянии l = = 12 см от центра шара, оказался в $k = 2$ раза больше диаметра падающего пучка. Найдите радиус шара R. Углы падения световых лучей считать малыми.

16. По оси горизонтально расположенной трубы с внутренним диаметром d распространяется узкий световой пучок (рис.12). Труба заполнена жидкостью с показателем преломления n, движущейся с некоторой скоростью и вытекающей из открытого конца трубы свободной струей. Какова должна быть скорость течения жидкости v_0, чтобы пучок вышел в воздух при первом падении на границу струи? Изменением поперечного сечения струи при движении жидкости в воздухе пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

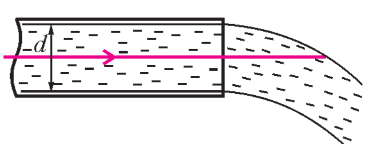


Рис. 12

17. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы на удвоенном фокусном расстоянии от нее (рис.13). Между источником и линзой перпендикулярно главной оптической оси расположен непрозрачный экран с маленьким отверстием, центр которого лежит на главной оптической оси. На какое расстояние b сместится изображение источника, если отверстие в экране перекрыть плоскопараллельной стеклянной пластинкой толщиной d = 1 см? Фокусное расстояние линзы F = 20 см, показатель преломления стекла n = 1,5. Углы падения и преломления считать малыми.

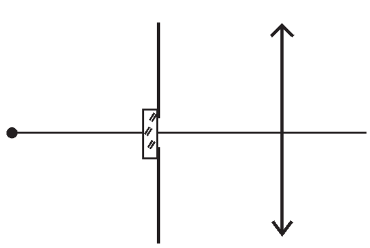


Рис. 13

18. Из тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовлены три линзы (рис.14). Взяв вначале линзы *1* и *2*, прижали их вплотную друг к другу и направили вдоль их главной оптической оси параллельный пучок света диаметром d = = 3 см. При этом на экране, расположенном за линзами на расстоянии L = 20 см от них, образовалось светлое пятно диаметром D_1 = 15 см. Когда проделали то же самое с линзами *2* и *3*, прижатыми вплотную друг к другу, диаметр светового пятна на экране оказался равным D_2 = 13 см. Полагая, что линзы тонкие и диаметр падающего пучка меньше диаметра линз, найдите их фокусные расстояния F_1, F_2 и F_3.

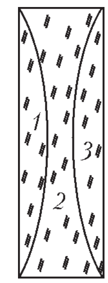


Рис. 14

19. Проводя облучение катода фотоэлемента пучком света мощностью W_1 с длиной волны λ_1, измерили величину тока насыщения. Затем катод фотоэлемента начали облучать светом с длиной волны λ_2. Какой должна быть мощность W_2 падающего на катод света, чтобы ток насыщения достиг той же величины, что и в первом случае? Квантовый выход фотоэффекта, т.е. отношение числа вырванных из катода электронов к числу падающих на его поверхность фотонов, в первом случае η_1, а во втором случае η_2.

20. Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, проводит сеанс связи с Землей, направляя в ее сторону лазерный луч. На какое расстояние s от первоначального положения сместится корабль к окончанию сеанса связи, если мощность лазерного луча P = 60 Вт, масса корабля M = 10 т, продолжительность сеанса $\tau = 1$ ч? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте первый закон термодинамики.

2. Что такое «инерциальная система отсчета»?

3. Два одноименных точечных заряда в вакууме сблизили, при этом сила взаимодействия между ними увеличилась в n = 4 раза. Во сколько раз изменилась (увеличилась или уменьшилась) энергия электростатического взаимодействия этих зарядов?

4. Электронный луч формирует изображение на экране телевизора, перемещаясь по экрану электронно-лучевой трубки (кинескопа). При создании одного изображения (кадра) размером L = 36 см по горизонтали и H = 24 см по вертикали луч прочерчивает на экране N = 625 горизонтальных строк. Средняя скорость движения луча по вертикали v = 6 м/с. С какой скоростью перемещается светящееся пятно по горизонтальной строке экрана? Временем обратного хода луча пренебречь.

5. Найдите работу, совершенную одним молем идеального газа в процессе *1–2*, представленном на рисунке 15. Считать *1–2* участком параболы. Необходимые пара-

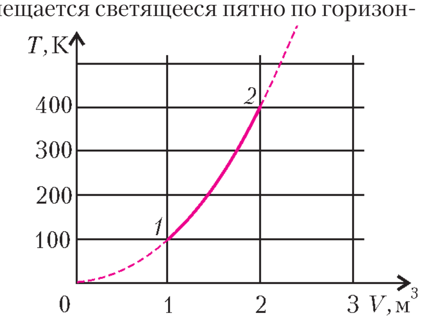


Рис. 15

метры газа в состояниях *1* и *2* определите по графику. Принять $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

6. Ионы, пройдя из состояния покоя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$, попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное скорости их движения. Во сколько раз увеличится радиус кривизны траектории ионов, если $\Delta\varphi$ увеличить в четыре раза? Ответ обоснуйте.

7. Точка совершает гармонические колебания вдоль оси x с амплитудой A = 5 см и частотой $\omega = 5\ \text{с}^{-1}$. Найдите величину ускорения точки в те моменты, когда ее скорость равна v = 6 см/с.

8. На гладком горизонтальном полу находится прямоугольный клин, опирающийся торцом о неподвижную вертикальную стенку (рис.16). По наклонной грани клина соскальзывает без трения брусок массой m = 0,1 кг. С какой силой клин давит на пол, если ускорение бруска $a = 5\ \text{м/с}^2$? Масса клина M = 0,2 кг. Принять $g = 10\ \text{м/с}^2$.

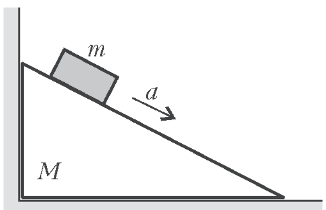


Рис. 16

9. Прямоугольная стеклянная призма помещена на пути параллельного пучка световых лучей, падающих по нормали на ее боковую грань (рис.17). При этом на экране, расположенном за призмой на расстоянии L = 1 м от ее передней грани, наблюдается темная полоса шириной Δx = 5 см. Найдите преломляющий угол при вершине призмы φ, считая его малым. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Указание. Считать синусы и тангенсы малых углов равными самим углам (в радианах). Дифракционные и интерференционные явления не учитывать.

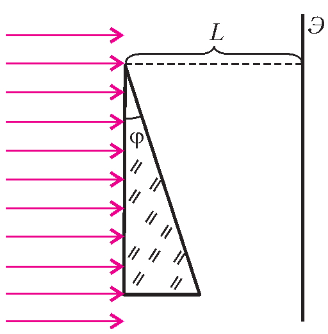


Рис. 17

10. На прямолинейный медный проводник с током длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 1\ \text{мм}^2$ в магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл действует максимальная сила F = 0,03 Н. Оцените дрейфовую скорость (скорость направленного движения) электронов в этом проводнике. Плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3$, ее молярная масса $\text{M} = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Считать, что на один атом меди приходится 1 электрон проводимости. Число Авогадро $N_А = 6 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Вариант 2

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.

2. Что такое «внутренняя энергия термодинамической системы»?

3. Зависимость проекции скорости точки на ось x от времени задана графиком, приведенным на рисунке 18. Найдите величину средней скорости точки за один период.

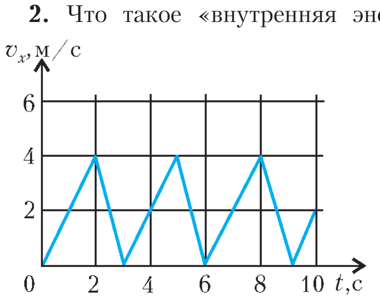


Рис. 18

4. Магнитный поток через поверхность, ограниченную проводящим контуром, меняется во времени по гармоническому закону, представленному на рисунке 19. Найдите амплитуду возникающей в контуре ЭДС индукции.

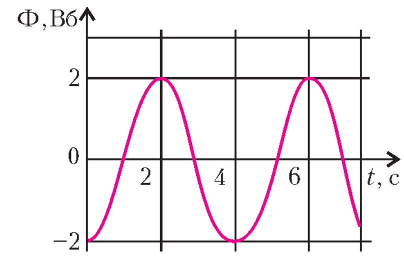


Рис. 19

5. В комнате около стены находится плоское прямоугольное зеркало. Его верхняя граница расположена на высоте h = 1,5 м от пола. На противоположной стене закрепляют небольшую лампочку. На какой минимальной высоте от пола следует закрепить лампочку, чтобы свет, отразившись от зеркала, не попадал на стену?

6. В схеме, приведенной на рисунке 20, ЭДС источников тока равны $\mathcal{E}_1 = 6$ В и $\mathcal{E}_2 = 12$ В. Емкость первого конденсатора $C_1 = 10$ мкФ, его заряд $q_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ Кл. Найдите электроемкость C_2 второго конденсатора.

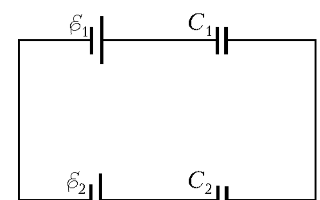


Рис. 20

7. Небольшой шарик, прикрепленный к нити длиной L = 0,4 м, движется по окружности в вертикальной плоскости. Скорость шарика при прохождении нижнего положения v = 6 м/с. Найдите ускорение шарика в верхней точке траектории. Нить считать нерастяжимой. Принять $g = 10\ \text{м/с}^2$.

8. Открытый цилиндрический сосуд перевернули вверх дном и опустили в воду так, что дно сосуда оказалось на уровне воды. На сколько градусов должен быть нагрет воздух в погруженном сосуде, чтобы вода была полностью вытеснена из него? Высота сосуда h = 25 см. Температура воздуха над водой $t = 27\ ^\circ\text{C}$. Плотность воды $\rho = 10^3\ \text{кг/м}^3$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

9. При напряжении U = 600 В сила тока в обмотке двигателя троллейбуса I = 187,5 А. Коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 80\%$. Троллейбус движется со скоростью v = 54 км/ч. Найдите силу тяги, развиваемую двигателем.

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 60$ см от нее. Оптическая сила линзы $D_1 = +2{,}5$ дптр. За этой линзой расположена еще одна линза – с оптической силой $D_2 = -5$ дптр так, что их главные оптические оси совпадают. При каком расстоянии между линзами свет, пройдя сквозь обе линзы, выйдет параллельным пучком?

Публикацию подготовили С.Аввакумов, А.Бегунц, П.Бородин, С.Волошин, В.Воронин, Н.Григоренко,Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, Ю.Киселев, С.Козлов, И.Ломов, Г.Медведев, А.Невзоров, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, С.Самсонов, И.Сергеев,А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин, А.Щеглов, Б.Щедрин

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 4 за 2006 г.)

1. Трех взвешиваний достаточно. Покажем, как это сделать. Пронумеруем все монеты слева направо от 1 до 28. Разделим их на три кучки, отнеся к первой кучке монеты с 1 по 9, во вторую – с 10 по 19, в третью – с 20 по 28.

Первым взвешиванием сравним веса первой и третьей кучек. Если весы оказались в равновесии, то фальшивые монеты находятся во второй кучке (в ней 10 монет). Если же одна из кучек оказалась тяжелее, то в ней, как минимум, содержится одна фальшивая монета. Следовательно, ближайшая монета из второй кучки тоже оказывается под подозрением.

Таким образом, в любом случае из 10 подозрительных монет за оставшиеся два взвешивания нужно найти 2 фальшивые монеты, лежащие рядом друг с другом. Снова пронумеруем эти монеты слева направо от 1 до 10.

Вторым взвешиванием сравним суммарный вес монет 3 и 4 с суммарным весом монет 7 и 8.

Если весы оказались в равновесии, то монеты 3, 4, 7, 8 – настоящие. Тогда третьим взвешиванием сравним суммарный вес монет 1 и 2 с суммарным весом монет 5 и 6. Если какая-то кучка перевесила, то монеты в этой кучке фальшивые; если же весы остались в равновесии, то фальшивые монеты – 9 и 10.

Если же какая-то кучка перевесила, например, монеты 3 и 4, то в этой кучке, как минимум, одна фальшивая монета. Поэтому третьим взвешиванием сравним суммарный вес монет 2 и 5. Если вес монет оказался одинаковым, то обе они настоящие, а фальшивые 3 и 4. Если перевесила монета 2, то фальшивые 2 и 3; если перевесила монета 5, то фальшивые 4 и 5.

2. *Указание*. В системе счисления с натуральным основанием $n > 1$ исходное число запишется так:

$$n^{200} + n^{198} + n^{196} + n^{194} + \ldots + n^4 + n^2 + 1 =$$
$$= \left(n^{100} + n^{99} + n^{98} + n^{97} + \ldots + n^2 + n + 1\right) \times$$
$$\times \left(n^{100} - n^{99} + n^{98} - n^{97} + \ldots + n^2 - n + 1\right).$$

3. Рассмотрим произвольные 4 участка, имеющие общую вершину, как показано на рисунке 1. Назовем их блоком. Участки занумерованы цифрами от 1 до 4. Длины сторон участков обозначены буквами a, b, c, d, так что площади участков равны соответственно $S_1 = bc$, $S_2 = bd$, $S_3 = ac$, $S_4 = ad$. Покажем, что на этих четырех участках имеется не более одного рыцаря. Предположим, что рыцарей не меньше двух.

Рис. 1

Ясно, что рыцари не могут быть соседями по стороне. Поэтому на участках блока ровно 2 рыцаря, которые владеют либо участками 1 и 4, либо 2 и 3. Если рыцари владеют участками 1 и 4, то $S_1 > S_2$, $S_4 > S_3$ и, следовательно, $S_1 \cdot S_4 > S_2 \cdot S_3$. Если рыцари владеют участками 2 и 3, то знаки неравенств меняются на противоположные и, следовательно, $S_1 \cdot S_4 < S_2 \cdot S_3$. Однако легко проверить, что $S_1 \cdot S_4 = abcd = S_2 \cdot S_3$. Поэтому наше предположение неверно, т.е. в любом блоке не более одного рыцаря.

По условию поле разделено на 2006^2 участков. Очевидно, они разбиваются на 1003^2 непересекающихся блоков. Поэтому среди владельцев не более 1003^2 рыцарей. Приведем пример, когда эта оценка достигается. Возьмем квадрат 3009×3009 и разделим его на вертикальные полосы ширины 2 и 1 попеременно. Потом то же самое проделаем в горизонтальном направлении. В результате мы получим разбиение, показанное на рисунке 2. Участками 2×2 владеют рыцари, а остальными участками – лжецы.

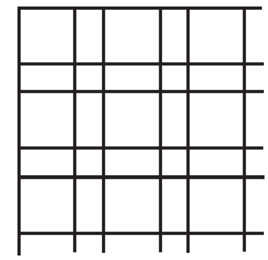


Рис. 2

4. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC. Обозначим точки: P – середина отрезка A_1C_1; Q – середина отрезка B_1C_1; R – середина отрезка A_1B_1 (рис.3). На луче A_1Q в направлении от точки A_1 отметим точку A_2 такую, что $QA_2 = A_1Q$. Получим параллелограмм $A_2C_1A_1B_1$, поэтому $A_2C_1 = A_1B_1$ и $A_2C_1 \parallel A_1B_1$. Аналогично, на луче B_1P отметим точку B_2 такую, что $PB_2 = B_1P$, а на луче C_1R – точку C_2 такую, что $RC_2 = C_1R$. Треугольник $A_1B_1C_1$ состоит из средних линий треугольника $A_2B_2C_2$, при этом точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника $A_2B_2C_2$. Это возможно только тогда, когда точки A_2, B_2, C_2 совпадают с точками A, B, C соответственно. Действительно, в противном случае либо какие-то две из точек A_2, B_2, C_2 лежат внутри ΔABC, а одна – снаружи, либо одна точка лежит внутри, а две другие – снаружи. В каждом из этих случаев существует сторона $\Delta A_2B_2C_2$, которая не пересекает сторону треугольника ABC, что невозможно.

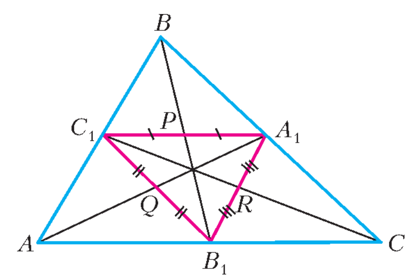


Рис. 3

5. Это число 24. Легко видеть, что оно и в самом деле делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{24} = 4{,}89$ (т.е. на 1, 2, 3 и 4). Докажем, что это число наибольшее. Предположим противное: пусть существует такое натуральное $n \geq 25$, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Тогда $\alpha \geq 5$, где $\alpha = \left[\sqrt{n}\right]$ – наибольшее целое число, не превышающее $\sqrt{n}$. Заметим, что либо в тройке $\alpha, \alpha-1, \alpha-2$, либо в тройке $\alpha-1, \alpha-2, \alpha-3$ любые два числа взаимно просты. Поскольку n в таком случае должно делиться на произведение чисел $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ или $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$, то заведомо

$$n \geq (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) > \left(\sqrt{n}-2\right)\left(\sqrt{n}-3\right)\left(\sqrt{n}-4\right),$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right).$$

Если бы число $\sqrt{n}$ было больше 6, то правая часть последнего неравенства была бы не меньше числа

$$\left(1 - \frac{2}{7}\right)\left(1 - \frac{3}{7}\right)\left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{60}{343},$$

т.е. $\sqrt{n} < \dfrac{343}{60} < 6$ – противоречие. Значит, $\sqrt{n} \leq 6$. Но при $n \geq 25$ число n должно было бы делиться на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, что противоречит неравенству $\sqrt{n} \leq 5$. Итак, $n \leq 24$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да. Стекло треснуло бы под действием воды, расширяющейся при превращении в лед, однако вода в бутылке лишь охладится до 0 °С, но не замерзнет.

2. Уровень воды в сосуде понизится, поскольку объем ледяного шарика больше объема образовавшейся из него воды.

3. Можно. Вода, находящаяся под давлением 40 атм, кипит при температуре около $250\ ^\circ\mathrm{C}$, что выше температуры плавления олова. На поверхности расплавленной ртути, температура плавления которой ниже $0\ ^\circ\mathrm{C}$, можно, охладив ртуть, заморозить, например, каплю воды.

4. Если вода раздроблена на мелкие капли, то лишь в некоторых из них будут иметься центры кристаллизации, в большинстве же капель вода окажется в переохлажденном состоянии.

5. Снежинки служат центрами кристаллизации, вокруг которых начинается образование льда.

6. На самом деле, убавилась внутренняя энергия капли, которая была передана во внешний мир – воздуху и стеклу – как раз в виде тепла.

7. Таяние плавающих льдов не изменяет уровня Мирового океана, а растопление континентальных льдов было бы равноценно добавлению в океан огромных объемов воды.

8. Нет. Следует учесть количество теплоты, необходимое для нагревания твердых тел до температуры плавления.

9. При попадании на кожу человека одинаковых количеств пара и кипятка за счет конденсации пара выделяется примерно в 5 раз большее количество теплоты, чем за счет охлаждения кипятка.

10. Кипяток, так как он превращается в пар быстрее, чем холодная вода, а образующийся пар обволакивает горящее тело и прекращает доступ к нему кислорода.

11. Чаинки сыграли роль центров парообразования в перегретой воде.

12. Нет. Температура кипящей воды не будет повышаться, пока вся вода не превратится в пар.

13. Нет. Чем глубже в воде находится пузырек, тем больше должно быть давление насыщенного пара в пузырьке, чтобы он не схлопывался, а этому соответствует и более высокая температура.

14. Кипение воды при пониженном давлении сопровождается поглощением тепла у остающейся в стакане воды, что приводит к ее охлаждению и замерзанию.

15. При охлаждении дна колбы давление над водой становится меньше давления насыщенного пара.

16. В случае, если «точка росы» ниже $0\ ^\circ\mathrm{C}$.

17. Естественно, запотевают внутренние поверхности стекол.

18. При критической температуре жидкость и ее пар неразличимы.

19. Водяной пар совершенно прозрачен, невидим и, следовательно, вовсе не имеет цвета. Белый туман, пар изо рта и облака – это не пар в физическом смысле слова, а скопление мельчайших водяных капелек.

Микроопыт

Вода имеет наибольшую плотность при $+4\ ^\circ\mathrm{C}$. При охлаждении (или нагревании) воды до этой температуры скорлупа будет всплывать, а при дальнейшем понижении (или повышении) температуры – погружаться.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. $n = 5$. **2.** $\delta = 25\%$. **3.** $s = 80$ см.

4. $u_2 = 5$ м/с. **5.** $F = 320$ Н. **6.** $v_{1\max} = 4$ м/с.

7. $T = 5$ Н.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

Математика

Вариант 1

1. -19. **2.** Корень трехчлена больше.

3. $\pm\sqrt{2\pi k}$, $-1\pm\sqrt{1+2\pi n}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

4. 36 и 8. С точностью до симметрии возможны три случая расположения точек A, B и C на прямой. Пусть R_1 и R_2 – радиусы первой и второй окружностей соответственно.

1) Точка A лежит между точками B и C. Тогда A находится внутри второй окружности, и не существует прямой, проходящей через A и касающейся второй окружности.

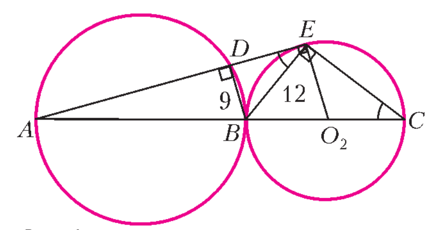


Рис. 4

2) Точка B лежит между точками A и C (рис.4). Треугольники BEC и BDE подобны по двум углам, откуда $R_2 = 8$, что невозможно, так как $B_2 = 9$.

3) Точка C лежит между точками A и B (рис.5). Треугольники BEC и BDE подобны по двум углам, откуда $R_2 = 8$. Треугольники ADB и AEO_2 также подобны по двум углам, откуда $R_1 = 36$.

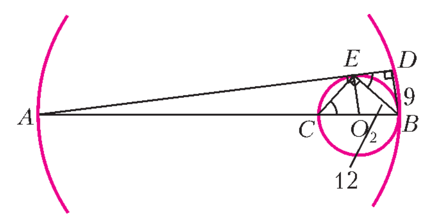


Рис. 5

5. $\frac{3}{5}$. Графики движения велосипедиста и пешехода (в осях время, расстояние) изображены на рисунке 6. Из подобия двух треугольников с параллельными сторонами 9 и 6 получаем

$$\frac{s}{AB - s} = \frac{9}{6},$$

откуда $s = \frac{3}{5}AB$.

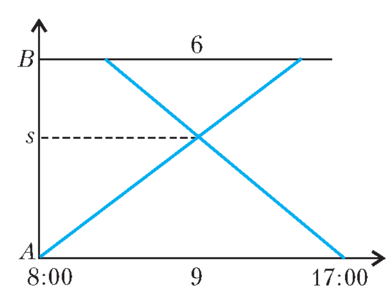


Рис. 6

6. $[0;4]$. Имеем

$$f(x) = \sqrt{4-x} - 2 \le x|x-3| + 4x = g(x),$$

причем функция $f(x)$ определена на луче $(-\infty;4]$ и убывает, а функция

$$g(x) = \begin{cases} 7x - x^2, & x \le 3, \\ x^2 + x, & x \ge 3 \end{cases}$$

определена и возрастает на всей прямой. Поскольку $f(0) = g(0)$, решением исходного неравенства является отрезок $[0;4]$.

7. $(-\infty;-2] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[0;\frac{1}{2}\right] \cup \{2\}$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно такому:

$$\sin^2 x + a\sin x + \left|a - \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2} = 0.$$

Это уравнение имеет решения, и его положительные решения образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда корни s_1, s_2 квадратного трехчлена $f(s) = s^2 + as + \left|a - \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2}$ удовлетворяют (с точностью до перестановки) одному из следующих условий:

1) $s_1 = 0,\ s_2 \in (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$;

2) $s_1 = 1,\ s_2 \in (-\infty;-1] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [1;\infty)$;

3) $s_1 = -1,\ s_2 \in (-\infty;-1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1;\infty)$;

4) $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ s_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

В случае 1 получаем $f(0) = 0 \Rightarrow a = 2$ или $a = -1$. Если $a = 2$, то $s_2 = -2$ – подходит. Если $a = -1$, то $s_2 = 1$ – не подходит.

Осталось найти соответствующие этим случаям значения a.

8. 2. По теореме о трех перпендикулярах имеем (рис.7) $\angle ACB = 90°$, откуда $AB = \sqrt{7+5} = 2\sqrt{3}$.

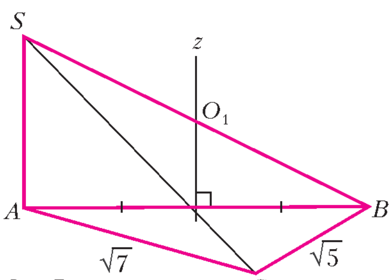


Рис. 7

Точка O_1 равноудалена от точек A, B и C, поэтому она лежит на перпендикуляре z к плоскости ABC, проходящем через середину ребра AB. Прямая z лежит в плоскости SAB, и единственная точка на ней, равноудаленная от точек S и B, – это середина ребра SB. Следовательно, O_1 – середина SB. Все точки O_n, как равноудаленные от точек A, B и C, лежат на прямой z. При этом O_2 не может совпасть с O_1. Поэтому условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда центр сферы, описанной около O_2ABC, совпадает с O_1.

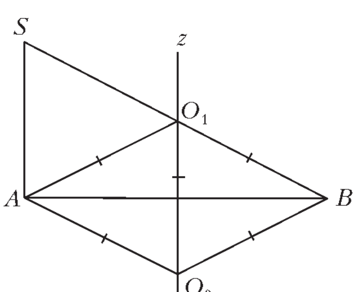


Рис. 8

Таким образом, в плоскости SAB имеем (рис.8)

$$O_1A = O_1O_2 = O_1B, \quad O_2A = O_2O_1 = O_2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1BA = 30° \Rightarrow SA = AB\,\mathrm{tg}\,30° = 2.$$

9. $(2,117)$, $(3,59)$. В силу взаимной простоты чисел m и n диагональ прямоугольника не проходит через вершины клеток внутри прямоугольника. Поэтому число пересекаемых ею клеток равно 1 плюс число вертикальных и горизонтальных линий, проходящих внутри прямоугольника. Если, скажем, горизонтальный размер прямоугольника – m, а вертикальный – n, то число вертикальных линий, проходящих внутри прямоугольника, равно $m - 1$, а горизонтальных $n - 1$. Таким образом,

$$1 + m - 1 + n - 1 = mn - 116 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 116 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 116,$$

откуда пара $(m-1, n-1)$ равна либо $(1,116)$, либо $(2,58)$, либо $(4,29)$ ($m < n$ по условию). Следовательно, m и n равны либо 2 и 117, либо 3 и 59, либо 5 и 30, причем последняя пара невозможна в силу взаимной простоты m и n.

10. $\frac{\pi}{4} + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $k, n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Неравенство

$$4(1-t)^{2004} + (1+t)^{2006} \ge 2^{2006},$$

очевидно, выполняется при $t \ge 1$ и при $t \le -1$.

Если $-1 < t < 1$, положим $t = \cos\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Тогда

$$4(1-\cos\varphi)^{2004} + 4(1+\cos\varphi)^{2006} =$$

$$= 4\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{2004} + \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^{2006} = 2^{2006}\left(\sin^{4008}\frac{\varphi}{2} + \cos^{4012}\frac{\varphi}{2}\right) <$$

$$< 2^{2006}\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2^{2006}$$

(неравенство строгое, поскольку $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$).

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $|\mathrm{tg}\,x| \ge 1$.

Вариант 2

1. 216. *Указание.* Если x – заданное трехзначное число, а y – натуральное число, вычитаемое во втором действии, то

$$\frac{\log_3 x - y}{y} \cdot \frac{\log_2 x - y}{y} = 1,$$

откуда $y = \log_6 x$, т.е. $x = 6^y$.

2. $(0;\infty)$. *Указание*. Пусть $t = 3^{-x} > 0$. Очевидно, что $0 < t < 1$. После преобразований неравенство приводится к виду $\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \ge 0$.

3. 90°. Пусть Π – плоскость, параллельная прямым a и b и проходящая через центры сфер, Π_a и Π_b – параллельные ей плоскости, содержащие прямые a и b соответственно. Плоскости Π_a и Π_b пересекают меньшую сферу, поскольку прямые a и b, касаются этой сферы. Расстояние между прямыми a и b, по условию равное диаметру меньшей сферы, равно также расстоянию между плоскостями Π_a и Π_b. Это означает, что плоскости Π_a и Π_b касаются сферы в диаметрально противоположных точках $A \in a$ и $B \in b$ (рис.9).

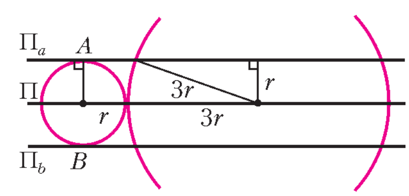


Рис. 9

Поскольку плоскости Π_a и Π_b параллельны плоскости Π и находятся на равном расстоянии от нее, то сечения ими большой сферы – окружности S_a и S_b одинакового радиуса, равного $\sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$. Прямые a и b касаются окружностей S_a и S_b соответственно.

При параллельном переносе плоскости Π_b на вектор $\overline{BA}$ она переходит в плоскость Π_a, а прямая b – в параллельную ей прямую b', проходящую через точку A, касающуюся окружности S_a и не совпадающую с прямой a (рис.10).

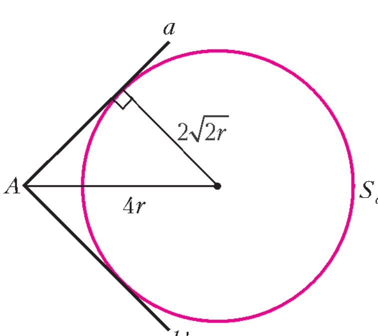


Рис. 10

Угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a и b':

$$2\arcsin\frac{2\sqrt{2}r}{4r} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

4. $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.*

$$|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1 - 2\sin x + \cos x| = -2\sin^2 x - 2\sin x.$$

Следовательно,

$$-1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow 1 - 2\sin x + \cos x \ge 0,$$

и уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x + \cos x = -2\sin^2 2x - 2\sin x, \\ 1 - 2\sin x + \cos x \ge 0, \end{cases}$$

решая которую получаем ответ.

5. 60°, $\frac{405\sqrt{3}}{16}$. Проведем через точку A прямую, параллельную стороне LM (рис.11). Эта прямая пересекает окружность в точке C. Дуги AB и BC равны, поэтому угол BKC равен углу BKA, а значит, и углу BKM (KB – биссектриса). Следовательно, точка C лежит на стороне KM.

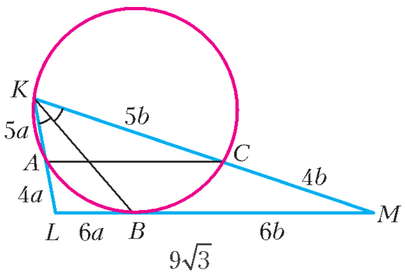


Рис. 11

По теореме о касательной и секущей, $LB^2 = LA \cdot LK \Rightarrow 6a^2 = LA(LA + 5a) \Rightarrow LA = 4a$. Отсюда $LK = 9a$,

$AC = \frac{AK}{LK} \cdot LM = \frac{5a}{9a} 9\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, и $\sin\angle K = \frac{AC}{2R} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\angle K$ может равняться либо 60°, либо 120°.

Если бы угол K равнялся 120°, то дуга AB равнялась бы 120° и центр окружности находился бы между прямыми AC и LM. Тогда расстояние от прямой AC до точки K было бы меньше, чем до прямой LM, а у нас эти расстояния относятся как 5:4. Следовательно, $\angle K = 60^\circ$.

По теореме Фалеса имеем $KC = 5b$, $CM = 4b$, откуда по теореме о квадрате касательной получаем $BM = 6b$.

Запишем теорему косинусов для треугольника KLM:

$$(9a)^2 + (9b)^2 - 2 \cdot 9a \cdot 9b \cdot \cos 60^\circ = (6a + 6b)^2.$$

Поскольку $6a + 6b = LM = 9\sqrt{3}$, получим, что $81ab = \frac{405}{4}$, а $S_{KLM} = \frac{1}{2} 9a \cdot 9b \sin 60^\circ = \frac{405\sqrt{3}}{16}$.

6. $\frac{1}{3}$. *Указание.* При фиксированном x выражение

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y| = |y - (2x - 1)| + |y - (-x)| + |y - 0|$$

принимает минимальное значение $m(x)$ при y, равном среднему из трех чисел $2x - 1$, $-x$, 0, при этом само $m(x)$ равно разности максимального и минимального из этих трех чисел. В свою очередь, эта разность минимальна при $x = 1/3$.

Вариант 3

1. (3; 1).

2. $(-\infty;10) \cup \{11\} \cup (14;+\infty)$. *Указание.* Для всех значений переменных из области определения правая часть неравенства отрицательна.

3. 90°, 60°. *Указание.* Положим $BC = x$, $AB = y$, $AC = z$. Тогда по условию $AM = \frac{\sqrt{13}}{2} x$, $z \ge y$ (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона).

По формуле для медианы треугольника имеем $2(y^2 + z^2) = x^2 + 13x^2$, а из теоремы косинусов следует $x^2 = y^2 + z^2 - \sqrt{3}yz$. Отсюда $z = 2x$, $y = \sqrt{3}x$ и $x^2 + y^2 = z^2$.

4. $\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. *Указание.* Выполните замену $t = \operatorname{tg} x \ge \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

5. $AD{:}BC = 2{:}1$. Определим положение точки L, в которой плоскость ABK пересекает ребро SD пирамиды $SABCD$. Для этого продолжим боковые стороны AB и CD основания пирамиды – трапеции $ABCD$ – до пересечения их в некоторой точке P (рис.12). Эта точка принадлежит плоскостям ASB, ABC и CSD, следовательно, точка L лежит на прямой PK.

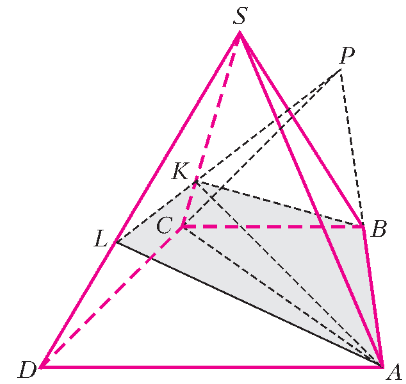


Рис. 12

Обозначим длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ через a и b соответственно; пусть при этом $a : b = k$. Треугольники APD и BPC подобны, следовательно, $DP : PC = AD : BC = k$.

Применим теорему Менелая к треугольнику CSD и прямой KL, пересекающей стороны CS и DS и продолжение стороны CD этого треугольника, используя условие задачи:

$\frac{SL}{LD} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CK}{KS} = 1$, стало быть, $\frac{SL}{LD} = \frac{5}{2k}$.

Отсюда $\frac{SD}{SL} = 1 + \frac{LD}{SL} = \frac{5 + 2k}{5}$.

Рассмотрим далее две пары треугольных пирамид: $SABK$, $SABC$ и $SAKL$, $SACD$. Обозначим их объемы через v_1, V_1 и v_2, V_2 соответственно. Воспользуемся теперь тем, что отношение объемов двух тетраэдров с равными трехгранными углами при вершине равно отношению произведений длин ребер, выходящих из этой вершины:

$$\frac{v_1}{V_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SK}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SK}{SC} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{v_2}{V_2} = \frac{SA \cdot SK \cdot SL}{SA \cdot SC \cdot SD} = \frac{SK \cdot SL}{SC \cdot SD} = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{5 + 2k}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{V_1 + \frac{5}{5+2k} V_2}{V_1 + V_2}.$$

Кроме того,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{BC} = k.$$

Таким образом,

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{1 + \frac{5}{5+2k} k}{1 + k} = \frac{95}{189} \Leftrightarrow 19k^2 - 28k - 20 = 0.$$

Найденное квадратное уравнение имеет единственный положительный корень: $k = 2$.

6. $a = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* После замены $t = |\sin(x + a)|$, $y = \cos 2x$, где $0 \le t \le 1$, $|y| \le 1$, данное уравнение принимает вид

$$f(y) \equiv ty^2 - 2t(t - 1)y - 2t^2 + t + 1 = 0.$$

Значение $t = 0$, очевидно, следует исключить. При $0 < t \le 1$ вычислим дискриминант квадратного уравнения относительно y:

$$\frac{D}{4} = t^4 - t.$$

Условие $D \ge 0$ дает единственное возможное значение $t = 1$. Но тогда $y = 0$, и мы приходим к системе

$$|\sin(2x + a)| = 1, \ \cos 2x = 0.$$

Вариант 4

1. 14^{00}.

2. $\left\{-\frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; 2\pi; \frac{13\pi}{6}\right\}$. *Указание.* Из требований, предъявляемых к основанию логарифма, вытекают ограничения $-6 < x < 7$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.
При этих условиях данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin 2x - 2\sin x + 1 = \cos x. \end{cases}$$

3. $[3; 6) \cup \left(6; \frac{133}{2} - 11\sqrt{6}\right)$. *Указание.* После замены $t = \sqrt{2x-6}$, где $t \geq 0$, данное неравенство принимает вид $11\sqrt{t^2 - 2\sqrt{6}t + 6} > t^2 - 6 \Leftrightarrow 11\left|t - \sqrt{6}\right| > \left(t - \sqrt{6}\right)\left(t + \sqrt{6}\right)$.

4. 672. Пусть K, L и M – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC, а N – проекция центра этой окружности O на прямую AD (рис.13). Тогда $OL = OK = 6$. Поскольку прямые BC и AD параллельны, то LN – их общий перпендикуляр, $LN = OL + ON = 14$.

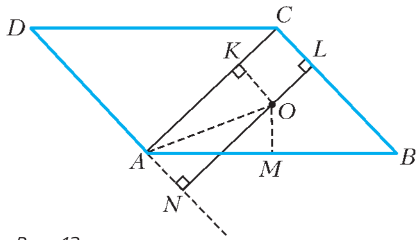


Рис. 13

Из прямоугольного треугольника AOK следует $AK = 8$.
Используя попарные равенства отрезков касательных, имеем для полупериметра p треугольника ABC равенство $p = BC + AK = BC + 8$.
Различные выражения площади треугольника ABC дают уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot LN = p \cdot OK, \text{ т.е. } 7BC = 6p.$$

Из полученных соотношений находим $BC = 48$, а затем и площадь параллелограмма $ABCD$.

5. $\left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$, $d \in \boldsymbol{R}$. *Указание.* Разложив на множители подкоренные выражения в первом и третьем слагаемых, заметим, что после замены $\alpha = x - y + d \geq 0$, $\beta = 4 - 2x + d \geq 0$, $\gamma = x + y - 2d \geq 0$ уравнение приводится к виду

$$\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma} = 4.$$

Из неравенства $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$ при $u \geq 0$ и $v \geq 0$, равенство в котором возможно лишь при $u = v$, следует, что

$$\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma} \leq \alpha + \beta + \gamma = 4.$$

Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = \frac{4}{3}$. Теперь легко находятся x и y.

6. 7. Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй сфер соответственно, а r и R — их радиусы, D – точка касания второй сферы с той гранью двугранного угла, в которой лежит точка A_1, а величина двугранного угла равна 2α.
Проведем сечение через точки O_1, O_2, A и D (рис.14, где для определенности $R > r$). Пусть также O_3 – проекция точки O_1 на прямую O_2D. Тогда

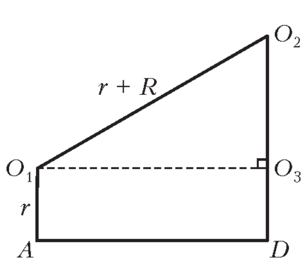


Рис. 14

$$O_1O_2 = r + R, \quad O_2O_3 = |r - R|,$$
$$AD = O_1O_3 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR}.$$

Аналогично получаем $BC = 2\sqrt{rR}$.
Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O_1, A и B (рис.15) и пересекающую ребро двугранного угла в точке E.
Очевидно, что
$O_1A = O_1B = r$,
$\angle AEO_1 = \angle BEO_1 = \alpha$,
$O_1A \perp AE$, $O_1B \perp BE$,
$AB \perp EO_1$. Следовательно, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \alpha$, тогда из треугольника ABO_1 находим $AB = 2r\cos\alpha$.
Аналогично рассмотрим плоскость, проходящую через точки O_2, C и D, и получим $CD = 2R\cos\alpha$.

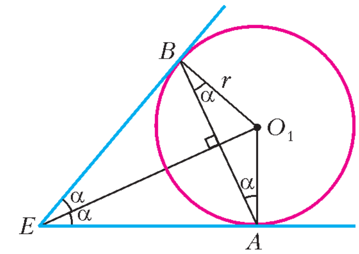


Рис. 15

Плоскости, содержащие точки O_1, A, B и O_2, C, D соответственно, перпендикулярны ребру двугранного угла, а значит, параллельны. Заметим, что пары точек A и B, C и D симметричны относительно плоскости, проходящей через точки E, O_1 и O_2 (биссектральной плоскости двугранного угла), поэтому лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$, стало быть, $ABCD$ – равнобокая трапеция (рис.16). Для высоты h этой трапеции имеем равенство

$$h^2 = AD^2 - \left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2.$$

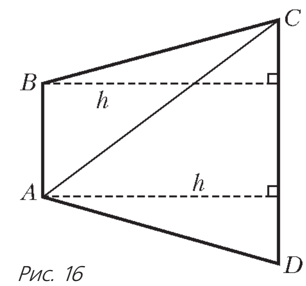


Рис. 16

Следовательно,

$$AC^2 = h^2 + \left(\frac{AB + CD}{2}\right)^2 = 4rR\left(1 + \cos^2\alpha\right).$$

Из свойств касательных и секущих следует $AL \cdot AC = AD^2$. Точно так же $CK \cdot AC = CB^2$. Тогда из равенства $AD = CB$ получаем $AL = CK$, значит, $AK = CL$. Далее,

$$KL = AL + CK - AC = \frac{2AD^2}{AC} - AC = \frac{8rR}{AC} - AC,$$

т.е.

$$\frac{KL}{AC} = \frac{8rR}{AC^2} - 1 = \frac{2}{1 + \cos^2\alpha} - 1.$$

Поэтому, используя условие задачи, имеем

$$\frac{1 - \cos^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = \frac{1}{7}, \text{ откуда } \cos^2\alpha = \frac{3}{4}.$$

Так как $CB^2 = 4rR = 28$, окончательно находим

$$AC^2 = 4rR\left(1 + \cos^2\alpha\right) = 49, \text{ т.е. } AC = 7.$$

Вариант 5

1. πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $1/2$.

3. $\{3\} \cup \left[-4 - \sqrt{29}; -2\right] \cup \left[1; -4 + \sqrt{29}\right]$.

4. 14. *Указание.* Площадь треугольника KMN равна 9, а его высота 3.

5. $\left(\frac{8}{9}; \frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)$; $\left(\frac{8}{9}; \frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right)$.

6. 4. Центры всех окружностей, касающихся сторон PQ и RS, лежат на одной прямой – биссектрисе угла, образованного продолжениями этих сторон (рис. 17). Заметим, что при условии $PQ \neq RS$ окружности не касаются друг друга.
Пусть r, x и R – радиусы наименьшей, средней и наибольшей

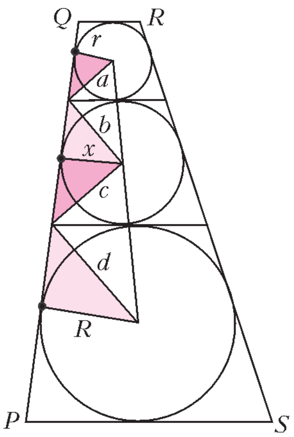


Рис. 17

окружностей соответственно. Биссектрисы смежных углов при параллельных прямых и боковой стороне PQ образуют с линией центров окружностей два прямоугольных треугольника с катетами a, b и c, d, причем острые углы в этих треугольниках равны.

Радиусы окружностей, перпендикулярные стороне PQ, образуют с отрезками a, b, c, d еще две пары прямоугольных треугольников с катетами r, x, R и гипотенузами a, b, c, d.

Треугольники с катетами a, b и c, d подобны. Следовательно, есть еще две пары подобных треугольников со сторонами r, a, x, c и x, b, R, d соответственно. Тогда

$$\frac{r}{x}=\frac{a}{c} \text{ и } \frac{b}{d}=\frac{x}{R}\Rightarrow x^2=Rr\Rightarrow\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{R}{r}.$$

По условию $\frac{x}{r}=2\Rightarrow\frac{R}{r}=4$.

7. $a\in\left(0;\,2-\sqrt{3}\right)\cup\left(\,2+\sqrt{3};+\infty\right)$. *Указание.* Поскольку $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$, после преобразований получаем

$$\begin{cases}\left(\left(x-1\right)^2-ax\right)\left(x+2\right)=0,\\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2-\left(a+2\right)x+1=0$ имеет 2 положительных различных корня x_1 и x_2, а $x+2\neq 0$. При этом $x_1^2+x_2^2=a^2+4a+2$. Осталось решить неравенство

$$a^2+4a+2>8a+1$$

при $a>0$, $a\neq 1$.

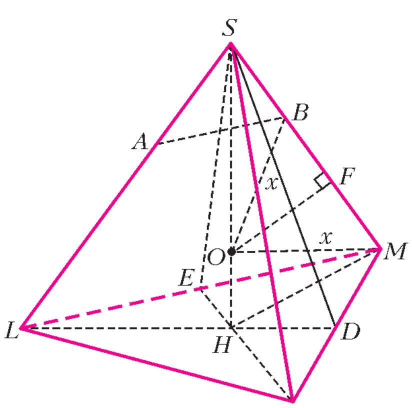


Рис. 18

8. $4\sqrt{13}$. Центр O сферы, проходящей через точки A, B, K и M, равноудален от всех этих точек (рис.18). Следовательно, точка O лежит на высоте SH пирамиды. Остается определить точку O так, чтобы было $OB=OM$. В такой точке высоту SH пересекает плоскость, перпендикулярная к отрезку BM и проходящая через его середину. Она пересекает треугольник SHM по отрезку OF (F – середина отрезка BM, $OF\perp SM$).

Пусть $OB=OM=x$. Тогда $OF=\sqrt{x^2-16}$,

$$SH=\sqrt{SM^2-MH^2}=\sqrt{12^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=6.$$

Из подобия ΔSFO и ΔSHM имеем

$$\frac{OF}{SF}=\frac{MH}{SH}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2-16}}{8}=\frac{6\sqrt{3}}{6}\Rightarrow x=4\sqrt{13}.$$

Вариант 6

1. $\left[-1;1\right]$. **2.** $\left(-\frac{13}{4};-3\right)$.

3. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{8}\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $k,n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\cos x\left(2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6}\right)=0.$$

4. $\frac{9}{2}$. *Указание.* Докажите, что четырехугольник $EFGH$ – прямоугольник (рис. 19). Точка E равноудалена от сторон CD и BC (так как лежит на биссектрисе CE), а значит, $EG\parallel AB$. Но $CK\parallel AF$, поэтому $AKEG$ – параллелограмм и

$$EF^2+FG^2+GH^2+EH^2=2EG^2=\frac{9}{2}.$$

5. 24:49.

6. $4-\sqrt{7}<a<4+\sqrt{7}$. *Указание.* Подкоренное выражение есть квадрат положительного числа $x^2+3\left|x\right|+1$. Поэтому уравнение преобразуется к виду

$$x^2+3ax+a^2+a=0,$$

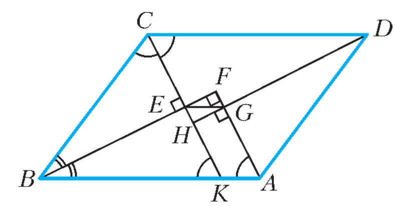


Рис. 19

причем его левая часть представляет собой квадратный трехчлен $f\left(x\right)$ с положительным старшим коэффициентом. Он имеет корни, лежащие по разные стороны от числа –3, тогда и только тогда, когда $f\left(-3\right)<0$.

Вариант 7

1. $\left\{-1\right\}\cup\left[1;+\infty\right)$. **2.** $\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. *Указание.* Пользуясь теоремой косинусов для треугольников ABC и ADC, найдите $\cos\angle D$, а затем и радиус круга по формуле $R=\frac{BD}{2\sin\angle D}$.

4. $\left(\sqrt{17}-7\right)/8$. *Указание.* Приведите уравнение к виду $f\left(2\arcsin\left(2x+1\right)\right)=f\left(\arccos\left(6x+3\right)\right)$, где $f\left(t\right)=3^t+\log_3 t$ – возрастающая функция. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2\arcsin\left(2x+1\right)=\arccos\left(6x+3\right)$, которое, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2\left(\arcsin\left(2x+1\right)\right)=6x+3,\\ 0\le 2\arcsin\left(2x+1\right)\le\pi.\end{cases}$$

5. 7. Пусть скорость плота и реки равна 1 (км/ед. времени), тогда скорости лодки и катера относительно плота равны 1 и 2 соответственно (рис.20). Первая встреча катера с плотом происходит в момент 1, когда лодка находится на расстоянии 1 км от них. В момент 2 катер догоняет лодку, оказываясь на расстоянии 2 км от плота, а в момент 3 снова встречается с плотом. Из подобия треугольников ABC и ADE, а также ACD и AEF получаем, что третья встреча катера с плотом происходит в момент 9. Далее, аналогично, катер встречает плот в моменты 27, 81, 243, 729, 2187, … При этом к моменту седьмой встречи плот проплывает 729 < 1000 км, а к моменту восьмой – должен был бы проплыть 2187 > 1000 км.

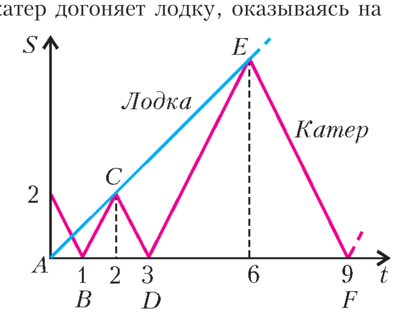


Рис. 20

6. $360-171\sqrt{3}$. *Указание.* Из подобия прямоугольных треугольников $AA'C'$, AEH, $FA'H$ и GAH (рис.21) имеем

$$AH=5\sqrt{3}>8=AA',\ AG=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>4\sqrt{2}=AO,$$

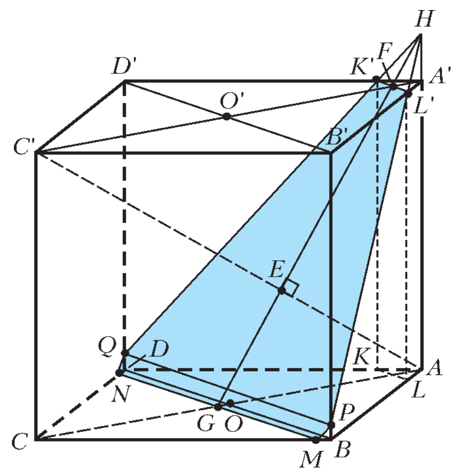


Рис. 21

$A'F = \dfrac{5\sqrt{3}-8}{\sqrt{2}} < 4\sqrt{2} = A'O'$, $CG = 8\sqrt{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Поэтому искомое сечение есть шестиугольник $K'L'PMNQ$, а плоскость сечения образует с плоскостью ABC угол α, причем $\cos\alpha = \dfrac{AG}{GH}$. Проекция сечения на плоскость ABC есть шестиугольник $KLBMND$, площадь которого равна площади квадрата $ABCD$ без треугольников CMN и AKL (или $A'K'L'$).

Вариант 8

1. $\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$. **2.** 0; 2.

3. $\left[0; \dfrac{1}{9}\right) \cup [1; \infty)$. *Указание.* Прологарифмируйте неравенство по основанию 2.

4. Через 28 минут. **5.** $\dfrac{180\pi}{180+\pi}$. **6.** 6.

7. $(-4; -1)$. *Указание.* Первое уравнение системы задает окружность $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{45}{4}$, а второе – прямую $y = -a(x+b)$, проходящую через точку $(-b; 0)$, не лежащую на одной горизонтали с центром $\left(\dfrac{5}{4}; -3\right)$ окружности. Следовательно, для того чтобы при любом значении углового коэффициента a такая прямая пересекала данную окружность ровно в двух различных точках, необходимо и достаточно, чтобы точка $(-b; 0)$ лежала внутри окружности, т.е. выполнялось неравенство $\left(-b - \dfrac{5}{4}\right)^2 + (0+3)^2 < \dfrac{45}{4}$.

Вариант 9

1. $\dfrac{1}{2}$.

2. 2. *Указание.* Пусть $\sqrt{y} = u$, $\sqrt{z} = v$. По свойству арифметической прогрессии имеем

$$\begin{cases} 2u = 1 + v, \\ 2\left(u^2 - 1\right) = 1 + \left(v^2 - u^2\right). \end{cases}$$

3. $\pi + 2\pi n$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

4. а) 40 км, б) 80 км/ч и 60 км/ч.

5. $AB = \dfrac{89}{6}$, $CD = \dfrac{23}{3}$.

6. $c < -\pi$, $c \geq \pi$. *Указание.* Уравнение

$$2x \arcsin(\sin x) = c \cdot 3^{\log_3 x} + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases}$$

где $g(x) = c + \dfrac{3}{x}$ – убывает от ∞ до c при $x > 0$, а

$$f(x) = 2\arcsin\sin x = \begin{cases} 2x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 2(\pi - x), & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$ – 2π-периодическая функция (рис.22):

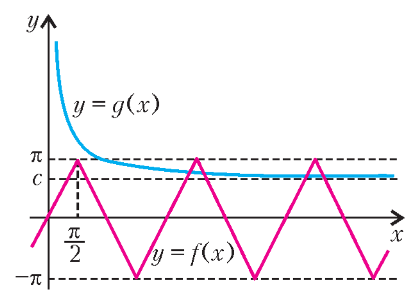


Рис. 22

1) в случае $c \geq \pi$ не имеет корней, так как $g(x) > c \geq \pi \geq f(x)$;
2) в случае $c < -\pi$ не имеет корней на луче $x > x_0$, где $g(x_0) = -\pi$, так как при $x > x_0$ справедливы оценки $g(x) < g(x_0) = -\pi \leq f(x)$, а на промежутке $0 < x \leq x_0$ имеет конечное множество корней, так как на каждом отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более двух корней;
3) в случае $-\pi \leq c < \pi$ имеет бесконечно много корней, так как при каждом целом достаточно большом n на любом отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ есть хотя бы один корень.

Вариант 10

1. $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. **2.** $\{0\} \cup \left[2; \dfrac{12}{5}\right]$.

3. $5\Big/\left(2\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей из условия задачи. Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный, а $\angle O_1O_2D = \angle ABC$.

4. $(-3; -2) \cup [1; 2]$. **5.** $10/3$ л. **6.** $\dfrac{11\pi}{30}$.

7. $\dfrac{120}{19}$.

8. -5; -4. *Указание.* Наибольшее значение квадратичной функции из условия задачи на отрезке достигается в одном из концов этого отрезка.

Вариант 11

1. $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$.

2. $4\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ (одна из трех хорд); $2\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ (две другие хорды). *Указание.* Пусть P и Q – центры большей и меньшей окружностей соответственно. Поскольку число хорд одинаковой длины нечетно, одна из этих хорд должна быть перпендикулярна прямой PQ, а две другие симметричны относительно этой прямой (рис.23).

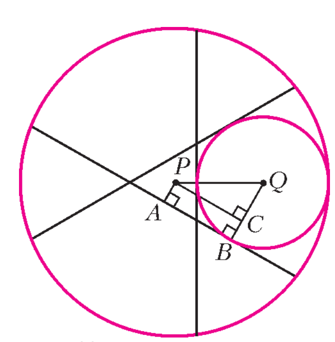


Рис. 23

3. $\left(1, -\dfrac{3}{2}, -3\right)$, $\left(-1, \dfrac{3}{2}, 3\right)$.

Указание. Левая часть уравнения неотрицательна, а правая – неположительна. Поэтому они по отдельности равны нулю.

4. 525. **5.** $\dfrac{9+3\sqrt{2}}{2}$.

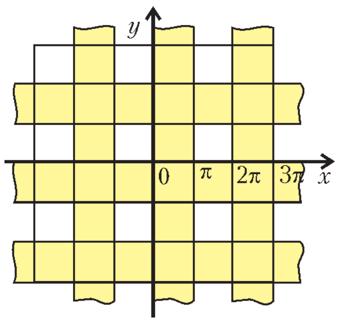


Рис. 24

6. $3\pi^2 k^2$. *Указание.* Решением неравенства $\sin x \ge 0$ на плоскости Oxy является множество полос

$2\pi m \le x \le \pi + 2\pi m$, $m = \boldsymbol{Z}$,

а неравенства $\sin y \le 0$ – множество полос

$-\pi + 2\pi n \le y \le 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Изобразим эти полосы на плоскости и заштрихуем их (рис.24). Каждый квадрат

$-\pi k \le x \le \pi k$, $-\pi k \le y \le \pi k$

имеет площадь $4\pi^2 k^2$ и разбивается на квадраты со стороной 2π, в каждом из которых заштриховано $\frac{3}{4}$ от его площади.

Вариант 12

1. $-\frac{1}{2};1$. **2.** $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left(6;\frac{13}{2}\right)$.

3. $\left\{\frac{13\pi}{5}\right\}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$\sin x = \sin\frac{2\pi}{5}$.

4. 24 трактора в первой бригаде и 45 – во второй. **5.** $\sqrt{2}$.

6. $a \in \left[-1; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

7. $2\pi + 8$. *Указание.* Данная фигура изображена на рисунке 25. Ее верхняя часть — полукруг, а нижняя ограничена графиком функции $f(x)$, состоящим из участков парабол. На

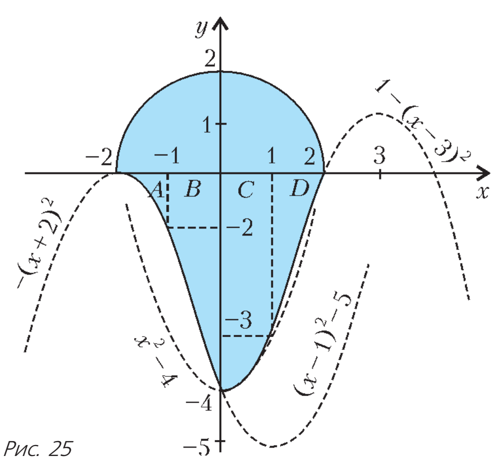


Рис. 25

каждом отрезке график функции $y = f(x)$ получается из графика параболы $y = x^2$ движением вдоль осей и отражением. Поэтому фигура D дополняет B до прямоугольника со сторонами 1 и 4. Аналогично, фигура A дополняет C до прямоугольника со сторонами 1 и 4.

Вариант 13

1. 6. **2.** $[3; 11]$. **3.** πm, $m \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 20%.

5. $\{(0; 0); (2; 0); (1; 1)\}$. *Указание.* Из данной системы следует, что $-1 < y < 2$, так что возможны лишь $y = 0$ и $y = 1$.

6. 30.

7. При $b < 1$ $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup [1; +\infty)$;

при $b = 1$ $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$;

при $b > 1$ $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Указание. Преобразуйте исходное неравенство к виду

$$2(b-1)\sqrt{3x+1} \ge (b-1)(3x+1).$$

Вариант 14

1. 0. **2.** $[3; \infty)$. **3.** $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\pm\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

4. 2. *Указание.* Докажите подобие треугольников ADC и ABE, а также BEF и CDE.

5. $(0; -a) \cup (-a; \infty)$ при $a < 0$, $(-\infty; -3a) \cup \left(-\frac{a}{3}; 0\right)$ при $a > 0$, решений нет при $a = 0$.

6. $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте уравнение к виду

$$9(\cos x - \cos 3x)^2 - 35\sqrt{3}(\cos x - \cos 3x) + 72 = 0,$$

откуда либо $\cos x - \cos 3x = 3\sqrt{3}$, либо $\cos x - \cos 3x = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Первое уравнение корней не имеет. Исследуем значения выражения $\cos x - \cos 3x = 4\left(\cos x - \cos^3 x\right)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t - t^3$ при $t \in [-1; 1]$. Имеем

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \text{ при } |t| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Поскольку $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ и $f(\pm 1) = 0$, то множество значений функции f есть отрезок $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}; \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$. Таким образом, $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ – наибольшее значение выражения $\cos x - \cos 3x$, которое достигается лишь при $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 15

1. $\{-5\} \cup (2; 3)$.

2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + \pi n,\ k, n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Данное уравнение приводится к виду

$4\cos 4x \cos 2x + 3\cos 4x + 4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos 4x + 1)(4\cos 2x + 3) = 0$.

3. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{9}{2}; \frac{27}{2}\right]$. **4.** $\frac{7\sqrt{13}}{10}$.

5. $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. *Указание.* После замены $t = 3^{4x^2+2x-1}$, где $t > 0$, получаем уравнение $9t^2 - 26t - 3 = 0$.

6. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{12}; 0\right)$. **7.** 25.

Вариант 16

1. 17 роз. **2.** $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. **3.** $\pi - 2$.

4. $1 \pm \frac{\pi}{2} \mp 2\pi k, \frac{1}{3} \pm \frac{\pi}{6} \mp \frac{2\pi n}{3},\ k, n \in \boldsymbol{N}$.

5. $29\frac{2}{3}\%$, $24\frac{2}{3}\%$, $18\frac{2}{3}\%$, $11\frac{2}{3}\%$. **6.** $a \in (-\infty; -35]$. **7.** 7 суток.

Вариант 17

1. $(-\infty; 0]$. **2.** $\frac{100}{49}$. **3.** $(3; +\infty)$.

4. $-\pi + 4\pi n < x < 4\pi n$, $4\pi n < x < \pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. $3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **6.** $\frac{8\pi}{3}$. **7.** $\left[\frac{17 - \sqrt{29}}{2}; 9\right)$.

8. $x_* > k_*$. *Указание*. Левая часть уравнения

$$\left(k^2-1\right)^8 = \frac{1}{2(k-1)}$$

неотрицательна, $k \neq 1$, следовательно, $k > 1$. При этих значениях переменной исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\left(k^2-1\right)^8 (k-1) - 1 = 0 .$$

Заметим, что его левая часть монотонно возрастает при $k > 1$. Значит, это уравнение имеет единственный корень k_*. Осталось подставить x_* в левую часть уравнения и убедиться, что получаемое выражение больше нуля.

Физика

Физический факультет

1. Поскольку нить нерастяжима, проекции скоростей всех точек нити на направление нити одинаковыми. Следовательно, при движении точки A нити вертикально вверх со скоростью v относительно плоскости, по которой движутся катушки, когда отрезок нити слева от этой точки образует с вертикалью угол α, как показано на рисунке 26, проекции скоростей точек отрезка нити AB на его направление равны $v\cos\alpha = v_{A\|} = v_{B\|}$. Если обозначить через v_0 скорость движения оси левой катушки относительно горизонтальной плоскости, а через ω – угловую скорость вращения этой катушки относительно ее оси и учесть, что катушка не скользит по горизонтальной плоскости, то можно записать $v_0 = \omega R$, где $R = nr$ – радиус щеки катушки.

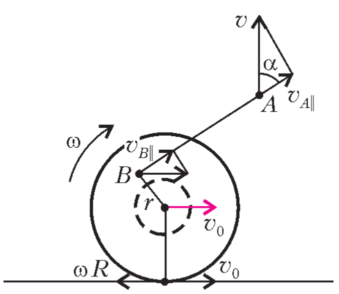


Рис. 26

По условию задачи, нить не скользит по катушке, а потому проекции скоростей точки B катушки и точки B нити на направление нити равны, т.е. $v_{B\|} = \omega r + v_0 \sin\alpha$. Следовательно, ось левой катушки относительно горизонтальной плоскости движется со скоростью

$$v_0 = \frac{v\cos\alpha}{\frac{1}{n} + \sin\alpha} .$$

Поскольку скорость оси правой катушки относительно той же плоскости из соображений симметрии равна по модулю, но направлена противоположно скорости движения оси левой катушки, искомый модуль скорости сближения катушек равен

$$v_{\text{сбл}} = 2v_0 = \frac{2v\cos\alpha}{\frac{1}{n} + \sin\alpha} = \frac{2v}{1+\sqrt{3}} .$$

2. При решении задачи следует считать, что между ударами о полусферу на шарик действует только сила тяжести. Поскольку при упругом ударе угол падения равен углу отражения (докажите это самостоятельно), то прямая AB лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр O полусферы. Пусть, как это показано на рисунке 27, радиусы OA и OB образуют с горизонтом углы β.

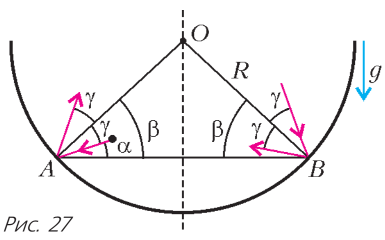


Рис. 27

Тогда углы падения и отражения равны $\gamma = \beta - \alpha$. Из закона сохранения энергии следует, что модуль v скорости шарика при падении и отражении в точках A и B один и тот же, при этом

$$AB = 2R\cos\beta = 2vt_1\cos(\beta-\gamma) = 2vt_2\cos(\beta+\gamma) ,$$

$$gt_1 = v\sin(\beta-\gamma) , \quad gt_2 = v\sin(\beta+\gamma) .$$

Из этих соотношений следует, что $\sin 2(\beta-\gamma) = \sin 2(\beta+\gamma)$. Поскольку $\beta > \gamma$ и $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$, решение предыдущего уравнения имеет вид $\pi - 2(\beta-\gamma) = 2(\beta+\gamma)$, т.е. $\beta = \frac{\pi}{4}$, а потому $2R\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}R$. Отсюда $\sqrt{2}Rg = v^2\sin 2(\beta-\gamma) = v^2 \sin 2\alpha$. Таким образом, модуль искомой скорости равен

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}Rg}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{2\sqrt{2}Rg} .$$

3. Поскольку нить нерастяжима, к тому моменту, когда легкий груз достигнет верхней точки своей траектории, поднявшись на высоту, равную радиусу цилиндра R, тяжелый груз опустится на высоту $\pi R/2$ и грузы будут двигаться с одинаковыми по модулям скоростями. Согласно закону сохранения механической энергии, модуль v указанной скорости должен удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{1}{2}\pi M - m\right)Rg = \frac{1}{2}(m+M)v^2 .$$

В момент отрыва легкий груз движется по дуге окружности радиусом R в горизонтальном направлении, а потому его центростремительное ускорение, равное v^2/R, обеспечивается только действием силы тяжести, т.е. имеет место равенство $mv^2/R = mg$. Подставляя сюда значение скорости из предыдущего соотношения, находим искомое отношение масс грузов:

$$n = \frac{M}{m} = \frac{3}{\pi - 1} .$$

4. Будем считать, что верхний конец пружины неподвижен. Поскольку после отрезания действующая на оставшуюся часть веревки сила тяжести уменьшается на величину nMg и скорость этой части веревки сразу после отрезания равна нулю, амплитуда A колебаний любой точки оставшейся части веревки равна $A = \frac{nMg}{k}$, а циклическая частота колебаний составляет $\omega = \sqrt{\frac{k}{(1-n)M}}$.

Как известно, при гармонических колебаний точки с амплитудой A и циклической частотой ω амплитуда ее ускорения равна $A\omega^2$. Поскольку направленное вертикально вниз ускорение любой точки оставшейся части веревки по модулю не может превышать g, должно иметь место соотношение

$$A\omega^2 \le g .$$

Подставляя сюда выражения для амплитуды и циклической частоты колебаний, находим, что $n = 0{,}5$.

5. Поскольку нагревание осуществляется медленно и поршень сразу начинает подниматься, можно пренебречь изменением кинетической энергии поршня при нагревании. Действующая на поршень со стороны гелия сила направлена перпендикулярно плоскости поршня и по модулю равна

$$F_{\text{г}} = F + Mg + p_0 S .$$

Следовательно, при подъеме поршня на высоту Δh гелий совершит над ним работу

$$A = F_{\text{г}}\Delta h .$$

Считая, что уравнение состояния гелия в интересующем диапазоне изменения его параметров совпадает с уравнением

Клапейрона–Менделеева, запишем

$$F_{\text{т}}\Delta h = R\Delta T,$$

где R – универсальная газовая постоянная, а ΔT – увеличение температуры гелия при смещении поршня вверх на Δh. При изменении температуры гелия изменяется его внутренняя энергия. Как известно, гелий является одноатомным газом. Поэтому его внутренняя энергия в расчете на один моль в модели идеального газа равна $(3/2)RT$. Следовательно, при увеличении температуры гелия на ΔT он, согласно первому закону термодинамики, должен получить количество теплоты

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + A.$$

По условию задачи теплообменом системы «цилиндр–поршень–газ» с внешней средой и теплоемкостью цилиндра с поршнем следует пренебречь. Поэтому общее количество теплоты, полученное системой, равно

$$Q = \Delta q + F\Delta h,$$

где Δq – количество теплоты, отданное спиралью, а $F\Delta h$ – количество теплоты, выделившееся в системе за счет трения поршня о цилиндр.По определению теплоемкость системы равна $C = \Delta q/\Delta T$. Подставляя в это соотношение составленные ранее выражения, получим

$$C = \left(\frac{3}{2} + \frac{Mg + p_0S}{Mg + p_0S + F}\right)R = \left(\frac{5}{2} - \frac{F}{Mg + p_0S + F}\right)R.$$

Отметим, что второе выражение в окончательном ответе можно получить непосредственно, если учесть, что нагревание гелия осуществляется изобарно, а молярная теплоемкость одноатомного газа при таком процессе равна $(5/2)R$.

6. Будем считать, что поведение аргона в заданном цикле подчиняется уравнению состояния идеального газа. Как известно, при изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа не изменяется (при таком процессе температура газа остается неизменной). Поэтому, согласно первому закону термодинамики, при этом процессе газ должен получить от нагревателя количество теплоты

$$q_{\text{н}} = A.$$

При изохорном охлаждении объем газа остается неизменным, а его температура понижается. Следовательно, газ должен отдать холодильнику количество теплоты, равное уменьшению его внутренней энергии. При адиабатическом сжатии нет теплообмена газа с окружающими телами. Поскольку при сжатии над газом совершается работа, то его внутренняя энергия, а следовательно, и температура повышаются. Из этого следует, что заданное в условии задачи изменение температуры ΔT равно уменьшению температуры газа при его изохорном охлаждении или увеличению температуры газа при его адиабатическом сжатии. Как известно, аргон является одноатомным газом. Его молярная теплоемкость при изохорном процессе равна $(3/2)R$, где R – универсальная газовая постоянная. Значит, при охлаждении аргон должен отдать холодильнику количество теплоты

$$q_{\text{х}} = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

На стадии адиабатического сжатия над аргоном совершается работа

$$A_{\text{а}} = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Таким образом, в заданном цикле работа газа равна

$$A_{\text{ц}} = A - A_{\text{а}},$$

а полученное от нагревателя количество теплоты равно A. Как известно, коэффициент полезного действия цикла равен отношению работы газа за цикл к количеству теплоты, полученному им от нагревателя за то же время:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{q_{\text{н}}} = 1 - \frac{3R\Delta T}{2A}.$$

7. При решении этой задачи, как обычно, будем считать, что сферы находятся достаточно далеко от всех других тел, потенциал бесконечно удаленной от сфер точки (а потому и любой точки, соединенной с землей) равен нулю, а диэлектрическая проницаемость среды вне и между сферами равна единице. Поскольку внутренняя сфера соединена с ключом тонким проводом, пренебрежем электрическими зарядами на этой проволоке и ключе, т.е. будем учитывать лишь электрические поля, порождаемые зарядами на сферах. При выполнении сделанных предположений нужно считать, что в исходном состоянии, когда ключ находится в положении *1*, потенциал внутренней сферы равен нулю, а в конечном состоянии, когда ключ находится в положении *2*, потенциал равен $\mathcal{E}$. Значит, и в исходном и в конечном состояниях на внутренней сфере должен находиться определенный заряд. Обозначим величину этого заряда в указанных состояниях q_1 и q_2 соответственно.

Учитывая симметрию расположения сфер и сделанные предположения, можно утверждать, что электростатическое поле между сферами на расстояниях ρ от их центра, удовлетворяющих условию $r \le \rho \le R$, в начальном и конечном состояниях должно быть таким же, как от точечных зарядов q_1 и q_2 соответственно, помещенных в центр сфер. Поскольку внешняя сфера изолирована, то ее полный заряд остается неизменным и равным q, а поле вне сфер, т.е. при $\rho \ge R$, в начальном и конечном состояниях такое же, как от точечного заряда, находящегося в центре сфер и равного $q + q_1$ и $q + q_2$ соответственно. Следовательно, заряды q_1 и q_2 должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{q}{R} + \frac{q_1}{r} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{q}{R} + \frac{q_2}{r} = 4\pi\varepsilon_0\mathcal{E},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Из этих соотношений следует, что после переключения ключа из положения *1* в положение *2* через источник должен протечь заряд $\Delta q = q_2 - q_1$. При этом сторонние силы батареи совершат работу $A = \mathcal{E}\Delta q$. Согласно закону сохранения энергии, эта работа равна сумме приращения энергии электростатического поля, вызванного изменением заряда внутренней сферы, и энергии, выделившейся в виде тепла.

Вычислить энергию электростатического поля, когда ключ находился в положении *1*, можно, например, из следующих соображений. Напряженность электрического поля на расстояниях ρ от центра сферы, удовлетворяющих условию $r \le \rho \le R$, должна быть такой же, как от точечного заряда q_1, помещенного в ее центр, т.е. равной

$$E(\rho) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\rho^2},$$

а потому разность потенциалов между внутренней и наружной сферами составляет

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{q_1(R - r)}{4\pi\varepsilon_0 rR}.$$

Из этого выражения следует, что взаимная емкость рассматриваемых проводящих концентрических сфер, т.е. емкость сферического конденсатора, равна

$$C = \frac{q_1}{\Delta\varphi_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r}.$$

Как уже отмечалось, на внешней поверхности сферы радиусом R в исходном состоянии находился заряд $q + q_1$, а потому между этой поверхностью и достаточно удаленными от нее телами существовало электрическое поле. Рассматривая указанную поверхность как одну обкладку сферического конденсатора, другой обкладкой которого являются достаточно удаленные от нее тела, можно утверждать, что емкость этого конденсатора равна $C^* = 4\pi\varepsilon_0 R$. Воспользовавшись известным выражением для энергии электростатического поля конденсатора, найдем энергию электростатических полей нашей системы в исходном и конечном состояниях:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{(q+q_1)^2}{2C^*} = \frac{q^2(R-r)}{8\pi\varepsilon_0 R^2},$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{2C} + \frac{(q+q_2)^2}{2C^*} = \frac{(4\pi\varepsilon_0 R\mathscr{E})^2 r + q^2(R-r)}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Искомое выделившееся количество теплоты равно

$$Q = A + (W_1 - W_2) = 2\pi\varepsilon_0 r\mathscr{E}^2.$$

8. Положим потенциал отрицательной клеммы батареи равным нулю. Тогда в момент замыкания ключа потенциал катода диода станет равным $\mathscr{E}$, потенциал же анода диода ниже, значит, диод будет заперт. По условию задачи диод следует считать идеальным, т.е. в запертом состоянии диод ток не проводит и емкость между его выводами равна нулю. Следовательно, в момент замыкания ключа потенциал анода диода будет равен $\mathscr{E}/3$.
После замыкания ключа через резистор сопротивлением $2R$, подключенный к конденсатору, начнет протекать ток, которым будет заряжаться конденсатор. По прошествии некоторого промежутка времени потенциал анода диода превысит потенциал его катода, и диод откроется. Начиная с этого момента, резисторы сопротивлением $2R$ можно считать соединенными параллельно, а после заряда конденсатора разность потенциалов между его обкладками станет равной падению напряжения на резисторе сопротивлением $4R$. В соответствии с законом Ома, это разность потенциалов будет равна $\Delta\varphi = \frac{4R}{5R}\mathscr{E} = 0{,}8\mathscr{E}$, а установившийся заряд любой обкладки конденсатора по модулю станет равным $q = C\Delta\varphi$. Поскольку конденсатор плоский, то напряженность электростатического поля, создаваемого зарядами одной из его пластин в любой точке между ними, следует считать постоянной и равной по модулю $E = \frac{1}{2}\frac{\Delta\varphi}{d}$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, которое можно найти из выражения емкости плоского воздушного конденсатора: $C = \varepsilon_0 S/d$.
Итак, между пластинами конденсатора через достаточно большое время после замыкания ключа будет действовать электростатическая сила взаимного притяжения, модуль которой равен

$$F = Eq = \frac{C\Delta\varphi^2}{2d} = \frac{0{,}32C^2\mathscr{E}^2}{\varepsilon_0 S}.$$

9. По условию задачи, когда сопротивление каждого из реостатов становится равным определенному значению, показания амперметра перестают зависеть от частоты. Действительно, при достаточно низкой частоте ω емкостное сопротивление конденсатора становится значительно больше, а индуктивное сопротивление катушки оказывается значительно меньше сопротивления шунтирующих их реостатов. При увеличении же частоты генератора емкостное сопротивление конденсатора уменьшается, а индуктивное сопротивление катушки растет. Поэтому при достаточно высокой частоте ω можно считать, что конденсатор «закорачивает» шунтирующий его реостат, а током, текущим через катушку, можно пренебречь по сравнению с током, текущим через шунтирующий ее реостат. Таким образом, если сопротивление каждого из реостатов равно R_0, то при достаточно низкой и при достаточно высокой частоте подключенная к источнику цепь ведет себя как резистор с сопротивлением R_0, причем в широком интервале частот отношение амплитуд напряжения генератора и силы тока через амперметр равно $U/I = R_0$.
Даже если сопротивление реостата R не равно R_0, значения напряжения на катушке индуктивности и шунтирующем ее реостате должны быть одинаковы, как и значения напряжения на конденсаторе и шунтирующем его реостате. При этом фаза напряжения $U_L(t)$ на катушке на $\pi/2$ больше фазы текущего по ней тока $I_L(t)$, поскольку $U_L(t) = LI'_L(t)$. Текущий же по шунтирующему катушку реостату ток $I_{RL}(t)$ изменяется синфазно с напряжением $U_L(t)$, так как $U_L(t) = RI_{RL}(t)$. Из сказанного следует, что фаза напряжения на катушке опережает фазу тока $I(t)$ через амперметр на такой угол φ_L, что $\operatorname{tg}\varphi_L = R/(\omega L)$.
Фаза напряжения $U_C(t)$ на конденсаторе меньше фазы текущего по нему тока $I_C(t)$ на $\pi/2$, так как $I_C(t) = q'_C(t) = CU'_C(t)$. Фазы же напряжения на конденсаторе и тока $I_{RC}(t) = U_C(t)/R$, текущего по шунтирующему конденсатор реостату, совпадают. Значит, фаза суммарного тока $I(t)$, текущего через эти элементы, опережает фазу напряжения на них на такой угол φ_C, что $\operatorname{tg}\varphi_C = \omega CR$.
Итак, текущий через амперметр ток удовлетворяет соотношению

$$I(t) = I_L(t) + I_{RL}(t) = I_C(t) + I_{RC}(t),$$

а напряжение генератора равно

$$U(t) = U\sin\omega t = U_L(t) + U_C(t).$$

Поэтому векторная диаграмма напряжений на элементах цепи при произвольных, но равных сопротивлениях реостатов будет иметь вид, показанный на рисунке 28.

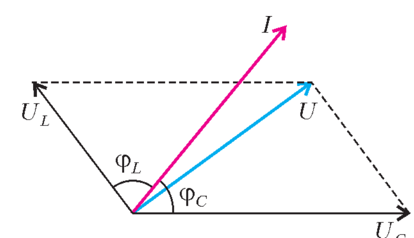


Рис. 28

Из этого рисунка можно понять, что отношение амплитуды напряжения $U(t)$ к амплитуде тока $I(t)$ не будет зависеть от частоты ω только при условии, что $\varphi_L + \varphi_C = \pi/2$, т.е. при условии совпадения фаз $U(t)$ и $I(t)$. Таким образом, при выполнении сделанных предположений и при $R = R_0$ текущий через амперметр ток и напряжение генератора должны изменяться синфазно при всех допустимых значениях ω.
Выполнение соотношения $\varphi_L + \varphi_C = \pi/2$ эквивалентно требованию $\operatorname{tg}\varphi_L \operatorname{tg}\varphi_C = 1 = CR_0^2/L$. Поскольку $R_0 = U/I$, то

$$L = \frac{CU^2}{I^2}.$$

10. С точки зрения электромагнитной теории света, падающий нормально на пленку пучок белого света следует рассматривать как набор плоских монохроматических волн, волновой фронт которых параллелен поверхности пленки.
По условию задачи мыльная пленка находится в воздухе, т.е. среде, показатель преломления которой с большой точностью можно считать равным единице. Как известно, при нормальном падении на границу раздела двух однородных изотропных сред отражение волны от оптически более плотной (другими словами, имеющей больший показатель преломления) среды происходит с потерей половины длины волны. Поэтому при отражении от границы «воздух–пленка» будет происходить потеря половины длины волны, а при отражении от границы «пленка–воздух» этой потери не будет. Поскольку

отраженная от второй границы волна дважды проходит через пленку толщиной d, не испытывая преломления и изменения своей фазы при каждом прохождении границы раздела, то разность хода отраженных от обеих границ пленки волн с длиной волны λ вне пленки будет равна $\Delta = 2nd - \frac{\lambda}{2}$. Отраженный свет, из-за интерференции отраженных волн, будет иметь максимальную интенсивность, если эта разность хода кратна длине падающей волны. Поскольку искомая толщина пленки должна быть минимальной, то $\Delta = 0$.

С точки зрения квантовых представлений, монохроматический свет – это поток фотонов, каждый из которых имеет энергию $W = h\nu$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, а ν – частота колебаний монохроматического света по электромагнитной теории. Поскольку эксперимент проводится в воздухе, то скорость распространения света можно считать равной скорости распространения света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Учитывая, что $c = \lambda\nu$, из ранее приведенных соотношений находим искомую толщину пленки:

$$d = \frac{\lambda}{4n} = \frac{hc}{4nW} \approx 0{,}1 \text{ мкм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} + \sqrt{H-h}\right)} \le v_0 \le \frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right)}$, или $1{,}75 \text{ м/с} \le v_0 \le 3{,}5 \text{ м/с}$.

2. $L = \frac{l}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Hv^2}{gl^2}}\right) = 20$ м. **3.** $N = \left[\frac{l}{d}\right] = 20$, где символом $[\ldots]$ обозначена целая часть числа.

4. $v_{y\max} = \frac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с. **5.** $\tau = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

6. $v_0 = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2EN_A}} \approx 9 \cdot 10^{-8}$ см/с. **7.** $\eta = 1 - \frac{5(m-1)}{4\left(n^2-1\right)} = \frac{1}{6}$.

8. $\Delta U = \frac{3}{5}mgH$. **9.** $L = \frac{l}{1 - \frac{p_1^2(m_1+m_2)}{2Tlm_1m_2}}$. **10.** $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 2\varphi_0$.

11. $U = \frac{C_0U_0}{C}\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)^n\right)$. При $n = 20$ и $\frac{C_0}{C_0+C} = 0{,}1$ $U \approx \frac{C_0U_0}{C} = 40$ В. **12.** $r = 5R$. **13.** $B = \frac{3}{4}B_0$.

14. Амплитуда напряжения не изменилась, амплитуда тока уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.

15. $R = \frac{2l}{k+1} = 8$ см. **16.** $v_0 \le \sqrt{\frac{gd}{n^2-1}}$.

17. $b = \frac{Fd(n-1)}{nF - d(n-1)} \approx 0{,}34$ см. **18.** $F_1 = \frac{Ld}{D_2 - d} = 6$ см, $F_2 = \frac{Ld}{2d - D_1 - D_2} \approx -2{,}73$ см, $F_3 = \frac{Ld}{D_1 - d} = 5$ см.

19. $W_2 = W_1\frac{\lambda_1\eta_1}{\lambda_2\eta_2}$. **20.** $s = \frac{P\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

Химический факультет

Вариант 1

3. Энергия взаимодействия увеличилась в 2 раза.

4. $v_г = \frac{vLN}{H} = 5625$ м/с.

5. $A = \frac{R}{2}\left(\frac{T_1}{V_1} + \frac{T_2}{V_2}\right)(V_2 - V_1) = 1245$ Дж. **6.** В 2 раза.

7. $a = -\omega\sqrt{A^2\omega^2 - v^2} \approx -1{,}2$ м/с^2.

8. $F = \left(M + m\left(1 - \frac{a^2}{g^2}\right)\right)g = 2{,}75$ Н.

9. $\varphi = \frac{\Delta x}{L(n-1)} = 0{,}1$ рад. **10.** $v_{др} = \frac{FM}{BleSN_A\rho} \approx 10^{-4}$ м/с.

Вариант 2

3. $v_{ср} = 2$ м/с. **4.** $\mathcal{E}_m = \frac{2\pi}{T}\Phi_m \approx 3{,}14$ Вб.

5. $H = 2h = 3$ м. **6.** $C_2 = C_1\frac{q_1}{C_1(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) - q_1} = 2$ мкФ.

7. $a = \frac{v^2}{l} - 4g = 50$ м/с^2. **8.** $\Delta T = T\frac{\rho gh}{p_0} = 7{,}5$ К.

9. $F = \frac{\eta UI}{v} = 6$ кН. **10.** $x = \frac{d(D_1 + D_2) - 1}{D_2(dD_1 - 1)} = 1$ м.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, З.В.Сурова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru